МОНГОЛ УЛСЫН ИХ СУРГУУЛЬ
МАТЕМАТИК КОМПЬЮТЕРИЙН СУРГУУЛЬ

М.ДЭНСМАА

ШУГАМАН АЛГЕБР БА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЙН ҮНДЭС

(Нэмж засварласан III хэвлэл)

Редактор: Ц.Навчаа

Улаанбаатар хот
2009 он

Өмнөх үг

Орчин үед математик аргууд шинжлэх ухааны янз бүрийн салбарт өргөн хэрэглэгдэж байна. Бодит зүйл, үйл явцыг судлахад тэдгээрийн математик загварыг байгуулах хэрэгтэй болдог. Хэрэв бодит үйл явц нь шугамын чанарыг агуулдаг бол түүний математик загварыг байгуулахад шугаман алгебрийн аппарат (мэдлэгүүд) өргөн хэрэглэгддэг.

Шугаман алгебрийн үндсэн элементүүд нь математик анализ, түүний хэрэглээ, дифференциал тэгшитгэл гэх мэт математикийн олон салбарт өргөн хэрэглэгдэнэ. Аналитик геометрийг орчин үеийн түвшинд судлах нь матрицан алгебр, тодорхойлогчийн онолыг судлахгүйгээр судлах боломжгүй юм. Мөн шугаман алгебрийн шугаман огторгуй, суурь, хэмжээс шугаман хамаарал ба шугаман хамааралгүйн тухай гэх мэт ухагдахуунуудад аналитик геометрийн үндсэн ухагдахуунууд ашиглагдана.

Энэ бүхэн нь шугаман алгебр ба аналитик геометр хоёрыг нэгтгэн судлах үндэс болох тул энэхүү сурах бичгийг хийх болсон юм. Энэхүү сурах бичигт аналитик геометр, шугаман алгебрийн онолын элементүүдийг бүтэн хамрахыг хичээлээ. Мөн бүлэг бүрт заавал бодох бодлогуудыг хавсаргасан.

Энэ номын талаархи санал зөвлөгөөгөө МУИС-ийн Математик Компьютерийн Сургуулийн Математикийн дидактик – Геометрийн тэнхимд гэсэн хаягаар ирүүлбэл Таньд баярлана.

Зохиогч

I бүлэг. Матриц, тодорхойлогч

1.1. Матриц. Үндсэн нэршлүүд

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

гэсэн $m \cdot n$ тоонуудаас тогтсон тэгш өнцөгт таблицыг авч үзье. Энэ (тоонуудын) таблицыг $m \times n$ эрэмбийн матриц гэнэ. $m \times n$ эрэмбийн матрицыг

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

гэж тэмдэглэдэг. Заримдаа $A = \|a_{ij}\|$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ буюу $A_{m \times n} = (a_{ij})$ гэж тэмдэглэх тохиолдол бий. Матрицыг бүтээж байгаа a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) тоонуудыг матрицын элемент гэнэ.

Хэрэв матрицын бүх элементүүд нь бодит тоо бол матрицыг бодит матриц гэнэ.

$A_{m \times n}$ матрицын $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ тоонуудыг i-р мөрийн элементүүд ($i = \overline{1, m}$); $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ тоонуудыг j-р баганын элементүүд ($j = \overline{1, n}$) гэнэ. a_{ij} нь матрицын i-р мөр j-р баганын элемент. Жишээлбэл: a_{18} нь 1-р мөр, 8-р баганaнд орших элемент a_{33} нь 3-р мөр, 3-р баганын элемент.

Жишээ 1.1. Хоёр үйлдвэрийн газар бөөний 3 агуулахад өөрийн бүтээгдэхүүнийг зөөдөг байжээ. Нэгдүгээр үйлдвэрээс агуулахууд хүртэл бүтээгдэхүүний нэгжийг зөөх үнэ нь харгалзан 2, 3, 4, хоёрдугаар үйлдвэрээс агуулахад бүтээгдэхүүний нэгжийг хүргэх үнэ нь харгалзан 1, 5, 2 гэвэл

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

нь тээврийн зардлын хувийн матриц болно.

Жишээ 1.2. Үйлдвэрийн газар 1, 2, 3, 4 төрлийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэдэг. Бүтээгдэхүүний төрөл тус бүрийн үйлдвэрлэлд 1, 2, 3 төрлийн түүхий эд хэрэглэдэг гэвэл материалын зардлын нормын систем нь

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

матриц байна. Энд a_{ij} нь j-р бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэхэд шаардагдах i-р материалын орц.

$A = [a_{11}a_{12}\dots a_{1n}]$ *гэсэн зөвхөн ганц мөртэй* $1 \times n$ *эрэмбийн матрицыг мөр матриц,* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ *гэсэн ганц баганатай* $m \times 1$ *эрэмбийн матрицыг багана матриц гэнэ.*

Тодорхойлолт. *Хэрэв A, B гэсэн хоёр матрицын эрэмбэ нь ижил, A матрицын элементүүд нь B матрицын харгалзах элементүүдтэй тэнцүү бол A, B матрицуудыг тэнцүү матрицууд гэнэ.*

Матрицын мөр баганын тоо тэнцүү бол тэр матрицыг квадрат матриц гэнэ. Жишээлбэл:

$$[a_1], \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

нь нэг, хоёр, гуравдугаар эрэмбийн квадрат матрицууд.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

гэсэн квадрат матрицын $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементүүдийг гол диагоноль, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементүүдийг хажуугийн диагональ гэнэ.

Матрицын бүх элементүүд нь тэгтэй тэнцүү бол тэг матриц гэнэ. Тэг матрицыг

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

гэж тэмдэглэнэ.

Хэрэв A матрицын диагональ дээр орших элементүүдээс бусад бүх элементүүд нь тэгтэй тэнцүү байвал A матрицыг диагональ матриц гэнэ.

Диагональ матриц нь

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

хэлбэртэй байна.

Диагональ матрицын гол диагональ дээрх бүх элемент нь нэгтэй тэнцүү бол нэгж матриц гэнэ.
Нэгж матрицыг

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

гэж тэмдэглэдэг.

Хэрэв квадрат матриц A-ийн гол диагоналийн нэг талд орших бүх элемент нь тэгтэй тэнцүү бол A матрицыг гурвалжин матриц гэнэ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицыг дээд гурвалжин матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицыг доод гурвалжин матриц гэнэ.

Тодорхойлолт. *Хэрэв A квадрат матрицын $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = \overline{1, n})$ байвал A матрицыг тэгш хэмт матриц гэнэ.*

Жишээ 1.3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 15 \\ 3 & 15 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ нь 3, 4-р эрэмбийн тэгш хэмт матрицууд.

1.2. Матриц дээр хийх шугаман үйлдлүүд

§ 1.2.1. Матрицыг нэмэх

Ижил эрэмбийн матрицууд дээр нэмэх үйлдэл хийнэ. $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij})$ матрицуудын нийлбэр матриц нь

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

элементүүдээс тогтоно. Өөрөөр хэлбэл A, B матрицуудыг нэмэхдээ харгалзах элементүүдийг нь нэмнэ. Жишээлбэл:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

бол

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 5 & 9 \\ 5 & -9 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

болно.

§ 1.2.2. Матрицыг тоогоор үржих

$A = (a_{ij})$ матрицыг α тоогоор үржихэд гарах матриц нь $A = (a_{ij})$ матрицын элемент бүхнийг α тоогоор үржихэд гарах тоонуудаас тогтоно. Жишээ нь: α=3 ба $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ бол $3A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 & -3 \\ 6 & 12 & 9 & 6 \\ 15 & -21 & 12 & -9 \end{bmatrix}$

$(-1)\cdot A$ *матрицыг* A *матрицын эсрэг матриц гэнэ.*

Матрицыг нэмэх ба тоогоор үржүүлэх үйлдлүүд нь дараах чанартай болохыг хялбархан баталж болно. Үүнд:

Чанар 1. $A + B = B + A$ (коммутатив чанар)
Чанар 2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциотив чанар)
Чанар 3. $A + O = O + A = A$ (тэг матриц)
Чанар 4. $A + (-A) = O$ (эсрэг элемент)
Чанар 5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (ассоциотив чанар)
Чанар 6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (дистрибутив чанар)
Чанар 7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутив чанар)
Чанар 8. $1 \cdot A = A$ (1-ээр үржүүлэх)
Чанар 9. $0 \cdot A = O$ (0-ээр үржүүлэх)

A, B матрицуудын ялгаврыг $A - B = A + (-B)$ гэж тодорхойлно.

1.3. Матрицуудыг үржих

§ 1.3.1. Нийлбэр түүний чанар

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ гэсэн n нэмэгдэхүүнүүдийн нийлбэрийг товчоор $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ гэж тэмдэглэнэ.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

i-г нийлбэрчлэх индекс гэнэ. Жишээлбэл:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$$

Хэрэв $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ нийлбэрт a_k нэмэгдэхүүн орохгүй бол

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_{k+1} + \cdots + a_n = \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} a_i$$

Дараах чанаруудыг хялбархан шалгаж болно. Үүнд:

Чанар 1.. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ нийлбэр нь нийлбэрчлэх индексээс хамаарахгүй.

Чанар 2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

Чанар 3. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

Чанар 4. $\sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}$

§ 1.3.2. Зохицох матриц

Хэрэв A матрицын баганын тоо B матрицын мөрийн тоотой тэнцүү бол A матрицыг B матрицтай зохицох матриц гэнэ. Матриц A нь B-тэй зохицох гэдгээс B матрицыг A-тай зохицох гэдэг нь мөрдөхгүй. Жишээлбэл:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

бол A нь B-тэй зохицох матриц. Харин B-ийн баганын тоо нэг, A-ийн мөрийн тоо хоёр тул B нь A-тай зохицох матриц биш байна.

Хэрэв A, B матрицууд нь ижил эрэмбийн квадрат матриц бол эдгээр нь бие биетэйгээ зохицох матриц байна.

§ 1.3.3. Матрицуудыг үржих

A матрицыг B матрицаар үржих үйлдэл нь A матриц B матрицтай зохицох матриц байх зөвхөн тэр үед л тодорхойлогдоно. Өөрөөр хэлбэл A нь $m \times n$ эрэмбэтэй B нь $n \times k$ эрэмбэтэй байх зөвхөн тэр үед л A-г B-ээр үржих үйлдэл тодорхойлогдоно.

Тодорхойлолт. *$A_{m\times n}=(a_{ij}), B_{n\times k}=(b_{ij})$ ба $C_{m\times k}=(c_{ij})=A\cdot B$ гэвэл $c_{ij}=\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj}$ байна.*

Тодорхойлолтоос үзвэл C матрицын i-р мөр j-р баганын элемент нь A-матрицын i-р мөрийн элементүүдийг B матрицын j-р баганын харгалзах элементүүдээр үржүүлж нэмсэнтэй тэнцүү байна. Иймд $A\cdot B$ үржвэр нь A-ийн мөрийн тоотой тэнцүү мөртэй, B-ийн баганын тоотой тэнцүү баганатай матриц байна. Жишээлбэл:

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B_{3\times 2}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

бол A нь B-тэй зохицох матриц тул $A\times B$ үржвэр тодорхойлогдоно.

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

энэ жишээнээс харахад AB нь A-тэй ижил тооны мөр, B-тэй ижил тооны баганатай байна.

AB үржвэрийг A матрицыг баруун талаас нь B матрицаар үржсэн, эсвэл B матрицыг зүүн талаас нь A матрицаар үржсэн үржвэр гэж ярина. Тодорхойлолтоос AB үржвэр оршин байхад

— BA оршихгүй ч байж болно,

— BA нь орших боловч $AB\neq BA$ байж болно

гэж мөрдөн гарна.

Жишээ 1.4. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot(-9) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -15 \end{bmatrix}$

$A_{1\times 2}\cdot B_{2\times 3}=C_{1\times 3}$ байна. Харин $B\cdot A$ оршин байхгүй.

Жишээ 1.5. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ өгчээ.

A нь B-тэй, B нь A-тай зохицох матрицууд байгаа тул AB, BA үржвэрүүд тодорхойлогдоно.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 1-6+0 & 7-8+0 \\ 3-3-5 & 21-4+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} 1+21 & -2-7 & 0+35 \\ 3+12 & -6-4 & 0+20 \\ -1+0 & 2+0 & 0+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB\neq BA.$$

Хэрэв $AB=BA$ байвал A,B матрицуудыг байр сольдог матрицууд гэнэ.

Тэгээс ялгаатай A,B матрицуудын үржвэр AB нь тэг матриц гарч болно.

Жишээ 1.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq O$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq O$ байг. AB, BA-г ол.

Бодолт.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Энэ тохиолдолд $A \neq O$, $B \neq O$, $AB = BA = O$ байна.

Матрицуудын үржвэрийн тодорхойлолтоос $AE = EA = A$, $AO = OA = O$ болохыг шалгаж болно.

Хэрэв A нь B-тэй, B нь C-тэй зохицох матрицууд бол A, B, C матрицуудын үржвэр ABC нь дараалан үржих дүрмээр $(A\cdot B)\cdot C$ гэж тодорхойлогдоно.

Чанар 1. Матрицуудын үржих үйлдэл нь (тодорхойлогдох тохиолдолд) $(AB)C = A(BC)$ ассоциотив (бүлэглэх) хуульд захирагдана.

Баталгаа. AB нь $A = A_{m\times n}$, $B = B_{n\times k}$ үед тодорхойлогдоно. AB нь C матрицтай зохицох бол $(AB)\cdot C$ тодорхойлогдоно. AB нь C-тэй зохицох тул $AB = (AB)_{m\times k}$, $C = C_{k\times \ell}$ байна. Иймээс $(AB)\cdot C$ нь $m\times\ell$ эрэмбийн матриц байна.

BC нь $n\times\ell$ эрэмбийн матриц A-тай зохицох тул $A\cdot(BC)$ нь $m\times\ell$ эрэмбийн матриц байна. $(AB)\cdot C = H$, $A\cdot(BC) = \overline{H}$ гэж тэмдэглэвэл эдгээр матрицууд ижил эрэмбийн $m\times\ell$ эрэмбийн матрицууд байна. Одоо H, $\overline{H}$ матрицуудын харгалзах элементүүд нь тэнцүү гэдгийг харуулъя.

$AB = D_{m\times k} = (d_{ij})$ гэж тэмдэглэвэл $d_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$ болох ба

$H_{m\times\ell} = (h_{ij})$: $\quad h_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{k} d_{ip}c_{pj} = \sum\limits_{p=1}^{k}\Big(\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sp}\Big)c_{pj} = \sum\limits_{p=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sp}c_{pj}$

$BC = G_{n\times\ell} = (g_{ij})$ гэж тэмдэглэвэл $g_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{k} b_{ip}c_{pj}$ болох ба

$\overline{H}_{m\times\ell} = (\overline{h}_{ij})$: $\quad \overline{h}_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}g_{sj} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}\Big(\sum\limits_{p=1}^{k}(b_{sp}c_{pj})\Big) = \sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{k} a_{is}b_{sp}c_{pj}$

Эндээс $h_{ij} = \overline{h}_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,\ell}) \Rightarrow H = \overline{H} \Rightarrow A(BC) = A(BC)$ ■.

Чанар 2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

Чанар 3. $(A+B)C = AC + BC$

Чанар 4. $C(A+B) = CA + CB$

1.4. Матрицаас хамаарах олон гишүүнт

$k>1$ бүхэл тоо, A квадрат матриц бол

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ удаа}}$$

матрицыг A матрицын k зэрэг гэнэ.
A^k нь A-тай ижил эрэмбийн матриц байна.
Нэгж матрицыг A матрицын тэг зэрэг (A^0) гэнэ. Өөрөөр хэлбэл $A^0=E$.
A матрицыг A-ийн нэг зэрэг гэнэ $A^1=A$.

Тодорхойлолт. *k бүхэл эерэг тоо, A квадрат матриц, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, $\alpha_0\neq 0$ дурын тоонууд бол*

$$\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\ldots+\alpha_kA^0$$

илэрхийллийг A матрицаас хамаарах k зэргийн олон гишүүнт гэнэ.

$$P(x)=\alpha_0x^k+\alpha_1x^{k-1}+\ldots+\alpha_k$$

гэсэн олон гишүүнтийн x-ийн оронд A квадрат матрицыг оруулахад $P(A)$ гэж гарна.

$$P(A)=\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\alpha_2A^{k-2}+\ldots+\alpha_kA^0$$

$$P(A)=\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\alpha_2A^{k-2}+\ldots+\alpha_kE$$

$P(A)$ нь тэг матриц гарвал A матрицыг $P(x)$ олон гишүүнтийн язгуур гэнэ.

Жишээ 1.7. $A=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -3 & -2\end{bmatrix}$ матриц $P(x)=x^2+x-14$ олон гишүүнтийн язгуур болохыг батал.

Бодолт. $P(A)=A^2+A-14E=$

$=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -4\\ -3 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -4\\ -3 & -2\end{bmatrix}-14\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}13 & 4\\ 3 & 16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -4\\ -3 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-14 & 0\\ 0 & -14\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}13+1+(-14) & 4+(-4)+0\\ 3+(-3)+0 & 16+(-2)+(-14)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$

Иймхүү A матриц $P(x)=x^2+x-14$ олон гишүүнтийн язгуур болж байна.

1.5. Матрицыг хөрвүүлэх

Тодорхойлолт. *A матрицын мөрүүдийг харгалзах баганаар нь солиход үүсэх матрицыг A-гийн хөрвөсөн матриц гэнэ.*
A матрицын хөрвөсөн матрицыг A^{T} буюу A' гэж тэмдэглэдэг.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Хэрэв $A = A_{m\times n}$ нь $m \times n$ эрэмбэтэй матриц бол A^{T} нь $n \times m$ эрэмбийн матриц байна.
Дараах чанаруудыг хялбархан шалгаж болно. Үүнд:
Чанар 1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
Чанар 2. $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$
Чанар 3. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ энд A, B нь ижил эрэмбэтэй матрицууд
Чанар 4. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ энд A нь B-тэй зохицох матриц.
A, B, C матрицуудын хувьд $(ABC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ байна.
Үүнтэй адилаар $A_1, A_2, \dots, A_n$ гэсэн n үржигдэхүүний хувьд

$$(A_1A_2\dots A_n)^{\mathrm{T}} = A_n^{\mathrm{T}} \cdot A_{n-1}^{\mathrm{T}} \cdot \dots \cdot A_2^{\mathrm{T}} \cdot A_1^{\mathrm{T}}$$

биелнэ.

1.6. Блок матрицууд

Үүнээс өмнө бид элементүүд нь тоо байх матрицуудыг авч үзсэн. Одоо элементүүд нь матриц байх матрицыг авч үзье.

Элементүүд нь матриц байх матрицыг блок матриц гэнэ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

матриц өгчээ. A матрицыг босоо, хэвтээ шугамуудаар хэд хэдэн матрицад хуваахад үүсэх матрицуудыг A матрицын блокууд гэж нэрлэнэ. Матрицыг блок хэлбэрт тавих нь нэг утгатай биш.

Жишээ 1.8. $A = \left[\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]$ матрицыг энд үзүүлснээр хувааж

$$B = B_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \qquad C = C_{13} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix}$$

$$D = D_{22} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad F = F_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$G = G_{12} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \qquad K = K_{1\times 3} = \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

гэж тэмдэглэвэл

$$A = \begin{bmatrix} B_{1\times 2} & C_{1\times 3} \\ D_{2\times 2} & F_{2\times 3} \\ G_{1\times 2} & K_{1\times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ D & F \\ G & K \end{bmatrix}$$

гэж бичин A матриц нь (3×2) эрэмбийн блок хэлбэртэй болно. Мөн

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

гэвэл $A = \begin{bmatrix} R & S & Q \end{bmatrix}$ гэсэн блок хэлбэрт бичиж болно. Энд A матрицыг (1×3) эрэмбийн блок хэлбэртэй тавилаа.

Ижил эрэмбийн A, B матрицуудыг блокуудад хуваахад харгалзах блокууд нь ижил эрэмбийн байвал тэдгээрийг блокуудад ижилхэн аргаар хуваалаа гэж ярина. Жишээлбэл:

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

матрицууд нь блокуудад ижил аргаар хуваагдсан байна.

Блок хэлбэрт тавигдсан матрицууд дээр нэмэх, тоогоор үржүүлэх үйлдэл хийхдээ харгалзах үйлдлийг блокууд дээр хийнэ. Энд нэмэх үйлдэл хийхэд матрицуудыг блокуудад ижил аргаар хуваагдсан байхыг шаардана.

Блок хэлбэрт тавигдсан матрицуудыг үржих тохиолдолд блок матрицууд зохицсон байх тухай асуудал гарна.

Блок матриц $A = A_{k\times \ell}$, $B = B_{m\times p}$ өгчээ.
Хэрэв $\ell = m$ ба A матрицын i-р мөрийн блокууд нь B матрицын j-р баганын харгалзах блокуудтай $(i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,p})$ зохицсон байвал $A = A_{k\times \ell}$ матриц нь $B = B_{m\times p}$ матрицтай зохицсон байна гэдэг.

$A = A_{k\times \ell}$, $B = B_{m\times p}$ эрэмбийн ба A нь B-тэй зохицсон тохиолдолд $C = A \cdot B$ нь блок хэлбэртэй байна. Тухайлбал $C = AB = C_{k\times p}$ хэлбэртэй байна. $C_{k\times p}$ матрицын i-р мөр j-р баганын блок нь A матрицын i-р мөрийн блокуудыг B матрицын j-р баганын харгалзах блокуудаар үржүүлж нэмэхэд гарах матриц байна.

Жишээ 1.9. $A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 3 \end{array}\right] = A_{2\times 2}, \quad B = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ \hline 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = B_{2\times 1}$ өгчээ.

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$

$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ гэж тэмдэглэвэл

$A = A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ гэсэн блокуудад тавигдана.

$A_{2\times 2}$-ийн баганын тоо нь 2, $B_{2\times 1}$-ийн мөрийн тоо нь мөн 2 ба A_1, A_3 нь B_1-тэй зохицсон; A_2, A_4 нь B_2-тай тус тус зохицсон тул $A \cdot B$ үржвэр тодорхойлогдоно.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 \\ A_3B_1 + A_4B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Хэрэв $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 3 \end{array}\right] = A_{2\times 2}, \quad B = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ \hline 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = B_{2\times 1}$ гэсэн блокуудад тавьсан байг.

Хэдийгээр A нь B-тэй зохицож байгаа боловч $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$ матрицууд зохицохгүй учраас энэ тохиолдолд $A \cdot B$ үржвэрийг блок матрицаар хийж болохгүй.

1.7. Сэлгэмэл

$1, 2, 3, \ldots, n$ тоонуудын дурын байрлалыг эдгээр тоонуудын сэлгэмэл гэнэ.

Цаашид n ширхэг тооны дурын сэлгэмлийг $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ гэж бичье. Энд α_i нь $1, 2, 3, \ldots, n$ тоонуудын аль нэг.

Тодорхойлолт. *Хэрэв $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ хоёр сэлгэмлийн хувьд $\alpha_i = \beta_i$ $(i = \overline{1, n})$ байвал эдгээр сэлгэмлүүдийг тэнцүү, эсрэг тохиолдолд (ядаж нэг $\alpha_i \neq \beta_i$ байвал) тэнцүү биш сэлгэмэл гэнэ.*

$1, 2, 3, \dots n$ тоонуудаас зохиох ялгаатай сэлгэмлүүдийн тоог олъё.

Сэлгэмлийн нэгдүгээр байранд эдгээр n ширхэг тоонуудаас аль нэгийг тавих боломж n, хоёрдугаар байранд үлдсэн $n-1$ элементүүдээс аль нэгийг тавих боломж $n-1$ тул өмнөх байрлалтайгаа нийлээд $n(n-1)$ ширхэг сэлгэлт үүснэ. Гуравдугаар байранд үлдсэн $(n-2)$ элементүүдээс аль нэгийг тавивал $n(n-1)(n-2)$ тооны сэлгэлт үүснэ. Ийнхүү үргэлжлүүлэхэд $n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1$ тооны ялгаатай сэлгэмэл үүснэ.

$1\cdot 2\cdot 3\dots(n-2)(n-1)n$ үржвэрийг $n!$ (эн факториал) гэж тэмдэглэнэ.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots(n-1)n$$

Иймд $1, 2, \dots, n$ тоонуудын ялгаатай сэлгэмлийн тоо $n!$-тэй тэнцүү байна.

Хэрэв $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ сэлгэмэлд $i < j$, $\alpha_j < \alpha_i$ байвал өөрөөр хэлбэл их тоо бага тооныхоо зүүн талд оршиж байвал α_i, α_j тоонуудыг инверс үүсгэж байна гэнэ.

Жишээ 1.10. (13254) сэлгэмэлд 3 ба 2, 5 ба 4 нь инверс үүсгэж байна. Энэ сэлгэмлийн нийт инверсийн тоо хоёртой тэнцүү байна.

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ сэлгэмлийн инверсийн тоог $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ гэж тэмдэглэе. R_i-ээр $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ сэлгэмлийн α_i тооны өмнө орсон α_i-ээс их тоонуудын тоог тэмдэглэе. Тэгвэл

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

байна. Жишээлбэл: (3124) гэсэн сэлгэмэлд $R_1 = 0$, $R_2 = 1$, $R_3 = 1$, $R_4 = 0$ байна. Иймд $R(3124) = 0 + 1 + 1 + 0 = 2$.

$$R(1234\dots n) = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{n} = 0$$

$R(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ нь тэгш (сондгой) тоо байвал $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$-г тэгш (сондгой) сэлгэмэл гэнэ.

Хэрэв сэлгэмэл α_i, α_j тоонууд байраа сэлгэж, бусад тоонууд нь өөрийнхөө байранд байвал α_i, α_j тоонуудыг транспозиц үүсгэж байна гэнэ.

Жишээлбэл: (123546), (13245), (62341)-сэлгэмлүүд нь 4 ба 5, 3 ба 2, 6 ба 1 тооны транспозицаар үүсгэгдэж байна.

Теорем 1.1. *Өгсөн сэлгэмэлд нэг транспозиц хийвэл сэлгэмлийн тэгш сондгой өөрчлөгдөнө.*

Баталгаа. $(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$ сэлгэмэлд транспозиц үүсгэх α_i, α_j тоонууд хоёр янз байрлах тохиолдол байна. Үүнд:

1. α_i, α_j тоонууд $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ сэлгэмэлд зэрэгцэн орсон байх өөрөөр хэлбэл сэлгэмэл нь $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots \alpha_n)$ хэлбэртэй байх тохиолдол. α_i, α_j тоонуудын байрыг сольж $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \dots \alpha_n)$ сэлгэмэл үүсгэе.

Хэрэв $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$-д α_i, α_j нь инверс үүсгээгүй бол $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$-д инверс үүсгэнэ. Хэрэв $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$-д α_i, α_j нь инверс үүссэн бол $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$-д инверс үүсгэхгүй. Иймд энэ хоёр сэлгэмлийн тэгш сондгой нь нэг нэгжээр ялгагдаж теорем батлагдана.

2. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ сэлгэмэлд α_i, α_j тоонуудын хооронд s ширхэг тоо байдаг гэвэл уул сэлгэмэл

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, b_1, b_2, \dots, b_s, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$$

хэлбэртэй байна. Энэ сэлгэмэлд α_i, α_j-ийн байрыг сэлгэж

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, b_1, b_2, \dots, b_s, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

сэлгэмэл үүсгэхэд α_i нь b_1-тэй, α_i нь b_2-тай гэх мэтчилэн α_i нь b_s-тай, α_i нь α_j-тэй байр сэлгэх замаар $s+1$ удаа байр сэлгэж

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, b_1, b_2, \dots, b_s, \alpha_j, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

гэсэн сэлгэмэл үүсгэнэ. Харин α_j нь b_s-тай, b_{s-1}-тэй гэх мэтчилэн b_1-тэй байраа сэлгэж s транспозиц хийнэ. Ингэж $2s+1$ удаа транспозиц хийж $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, b_1, b_2, \dots, b_s, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ сэлгэмэл үүсгэнэ. Эндээс

$$\begin{gathered}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, b_1, b_2, \dots, b_s, \alpha_j, \dots, \alpha_n)\\(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, b_1, b_2, \dots, b_s, \alpha_i, \dots, \alpha_n)\end{gathered}$$

сэлгэмлүүд тэгш сондгой чанараараа өөр болох нь харагдаж байна. ▲

1.8. Матрицын тодорхойлогч

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадрат матриц өгчээ. Энэ матрицын мөр, багана бүрээс нэг нэг элемент агуулсан $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ $(\alpha_i \neq \alpha_j,\ i,j = \overline{1,n})$ үржвэрүүдийг авч үзье. Энд хялбарыг бодож элементүүдийн мөрийн дугаарыг заах нэгдүгээр индексийн өсөх дараалаар байрлуулав. Ингэхээр баганын дугаарыг заагч хоёрдугаар индекс $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ нь $1, 2, 3, \dots, n$ тоонуудын нэг сэлгэмэл байна. Ийм бүтэцтэй үржвэрүүдийн тоо нь $1, 2, \dots, n$ тоонуудаас зохиох бүх сэлгэмлийн тоо $n!$-тай тэнцүү байх нь тодорхой байна. $n!$ тооны

$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ үржвэр бүрийг $(-1)^{R(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$-ээр үржүүлье. Тэгвэл $n!$ тооны

$$(-1)^{R(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$$

үржвэрүүдийг гаргана.

Тодорхойлолт. *$n!$ тооны $(-1)^{R(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ үржвэрүүдийн нийлбэрийг n эрэмбийн квадрат матриц A-ийн тодорхойлогч гэнэ.*

A матрицын тодорхойлогчийг

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

гэж тэмдэглэдэг. Заримдаа $|A|$ гэж тэмдэглэдэг.
Тодорхойлолтоор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{R(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$$

Жишээлбэл: $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ нь 4-р эрэмбийн тодорхойлогчийн $(-1)^{R(2413)} = (-1)^3$ тэмдэгтэй гишүүн харин $a_{13}a_{24}a_{33}a_{42}$-ийн хоёрдугаар индекс (3432) нь 3-р баганаас хоёр элемент орсныг зааж байна. Иймд тодорхойлогчийн гишүүн биш.

$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}$ үржвэрийг тодорхойлогчийн гишүүн, $a_{i\alpha_i}$-г тодорхойлогчийн элемент гэж нэрлэнэ.

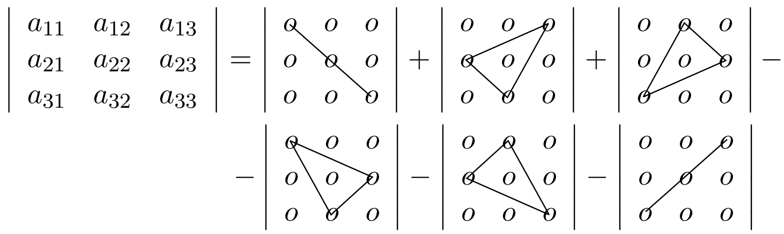
Зарим тухайн тохиолдлыг авч үзье.

1. Нэгдүгээр эрэмбийн $A_1 = [a_{11}]$ матрицын тодорхойлогч
$\det A_1 = \det(a_{11}) = a_{11}$ байна.

2. $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ хоёрдугаар эрэмбийн матрицын тодорхойлогч нь $(-1)^{R(\alpha_1,\alpha_2)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}$-хэлбэрийн $2! = 2$ тооны үржвэрийн нийлбэр байна. Иймд $\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3. $\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$
$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ гэсэн $3! = 6$ гишүүний нийлбэр байна. $a_{11}a_{23}a_{32}$-гишүүний хоёрдугаар индекс (132)-ийн инверс нэгтэй байгаа тул

хасах тэмдэгтэй байна гэх мэтчилэн гишүүдийн тэмдгийг тогтооно. $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}$-гишүүн бүр нь гурван элементийн үржвэр байна.
Нэмэгдэхүүн бүрийг дараах схемээр олж болно.



Гишүүд нь зураасаар холбогдсон элементүүдийн үржвэр байна.

1.9. Тодорхойлогчийн чанарууд

A матрицын тодорхойлогч дараах чанартай.

ЧАНАР 1. Өгсөн A матрицын тодорхойлогч нь түүний хөрвөсөн матрицын тодорхойлогчтой тэнцүү.

Баталгаа. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ квадрат матриц өгчээ.

$$\det A = \sum (-1)^{R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

$$\det A^T = \sum (-1)^{R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}$$

Эндээс $\det A = \det A^T$. ▲

ЧАНАР 2. Хэрэв тодорхойлогчийн аль нэг мөр (багана)-ийн бүх элементүүд тэгтэй тэнцүү бол тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү ($\det A = |A| = 0$).

Баталгаа. Тодорхойлогчийн гишүүн бүрт тэр тэгээс тогтох мөр (багана)-өөс нэг элемент орно гэдгээс мөрдөн гарна. ▲

ЧАНАР 3. Хэрэв тодорхойлогчийн аль нэг мөр (багана)-ийн бүх элементүүд ерөнхий үржигдэхүүнтэй бол тэр үржигдэхүүнийг тодорхойлогчийн тэмдгийн өмнө гаргаж болно.
Жишээлбэл: $|A|$ тодорхойлогчийн i-р мөрийн элементүүд λ гэсэн ерөнхий

үржигдэхүүнтэй бол

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

байна.

Чанар 4. Хэрэв тодорхойлогчийн аль нэг мөр (багана)-ийн бүх элемент хоёр нэмэгдэхүүний нийлбэр байвал уул тодорхойлогч нь тэр нийлбэр мөр нь нэгдүгээр ба хоёрдугаар нэмэгдэхүүнээс тогтсон бусад элемент нь хэвээрээ байх хоёр тодорхойлогчийн нийлбэртэй тэнцүү.
Тухайлбал:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j} + a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j} + a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj} + a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a'_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a'_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= |A'| + |A''|$$

байна.

Баталгаа. Энэ чанарын баталгаа нь

$$|A| = \sum (-1)^{R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots (a'_{ij} + a''_{ij}) \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum (-1)^{R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a'_{ij} \dots a_{n\alpha_n} +$$

$$+ \sum (-1)^{R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a''_{ij} \dots a_{n\alpha_n} = |A'| + |A''|$$

гэж тодорхойлолтоос мөрдөн гарна. ▲

Чанар 5. Хэрэв A матрицын хоёр мөр (багана)-ийн байрыг соливол тодорхойлогчийн тэмдэг эсрэгээр өөрчлөгдөнө.

$$\det B = -\det A$$

Баталгаа. Энэ чанарын баталгаа нь Теорем 1.1-ээс мөрдөнө.

Матриц B нь A-гийн i-р мөрийг $i+1$-р мөртэй байрыг нь солиход үүссэн гэе. Тэгвэл

$$\det A = \sum (-1)^{R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{i\alpha_i} a_{i+1\alpha_{i+1}} \ldots a_{n\alpha_n}$$

$$\det B = \sum (-1)^{R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i+1},\alpha_i,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{i+1\alpha_{i+1}} a_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n}$$

$$R(\alpha_1,\alpha_2 \ldots \alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n), \quad R(\alpha_1,\alpha_2 \ldots \alpha_{i+1},\alpha_i,\ldots,\alpha_n)$$

(нэг транспозицын дараа инверс өөрчлөгдөнө) тоонууд тэгш сондгойгоороо ялгаатай. Иймээс $\det B = -\det A$ байна.

Хэрэв i, j-р мөрүүдийн хооронд m тооны мөр агуулсан A матрицын i-р мөрийг j-р мөрөөр $(i<j)$ солиход гарсан матрицыг B гэе. A матрицын i-р мөрийг j-р мөрөнд, j-р мөрийг i-р мөрөнд авчрахад $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ сэлгэмэлд $2m+1$ транспозиц хийнэ. Тэгвэл

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i,b_1,b_2,\ldots,b_m,\alpha_j,\ldots,\alpha_n),$$

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j,b_1,b_2,\ldots,b_m,\alpha_i,\ldots,\alpha_n)$$

инверсүүдийн тоо нь тэгш сондгойгоороо ялгаатай. Иймээс

$$\det B = -\det A$$

болно. ▲

Чанар 6. Хэрэв A матриц нь хоёр ижил мөр (багана)-тэй бол $\det A = 0$ байна.

Баталгаа. A матрицад байгаа хоёр ижил мөр (багана)-ийн байрыг солиход A матриц өөрөө гарах ба 5-р чанараар $\det A = -\det A$ болно. Эндээс $\det A = 0$ байна. ▲

Чанар 7. Хэрэв A матриц нь хоёр пропорциональ мөр (багана) агуулсан бол $\det A = 0$ байна.

Баталгаа. A матрицын i,j-р мөрүүд пропорциональ бол пропорционалийн коэффициент λ-г тодорхойлогчийн өмнө гаргахад i,j-р мөрүүд ижил болох ба 6-р чанараар тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү болно. ▲

Чанар 8. Тодорхойлогчийн аль нэг мөр (багана) дээр өөр мөр (багана)-ийг тоогоор үржүүлж нэмэхэд тодорхойлогч өөрчлөгдөхгүй.

Баталгаа. Энэ чанарыг батлахдаа чанар 4 ба 6-г хэрэглэнэ.

1.10. Минор ба алгебрийн гүйцээлт

Тодорхойлолт. *$m \times n$ эрэмбийн A матрицын дурын s мөр, s баганыг $(1 \le s \le \min(m,n))$ сонгон авч, эдгээр сонгосон мөр, баганын огтлол* *дээр орших элементүүдээс s эрэмбийн матриц зохиоё. Энэ s эрэмбийн матрицын тодорхойлогчийг A матрицын s эрэмбийн минор гэнэ.*

Тодорхойлолт. *n эрэмбийн квадрат A матрицын s эрэмбийн минорыг M гэж тэмдэглэе. M минорт орсон s мөр, s баганын элементүүдээс бусад элементүүдээс бүтсэн M' минорыг M минорын гүйцээлт гэнэ.*

Жишээ 1.11.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

матрицын хоёрдугаар эрэмбийн нэг минор, түүний гүйцээлтийг ол.

Бодолт. A матрицын 2, 3-р мөр; 3, 5-р баганыг сонговол

$$M = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}$$

минор үүснэ. Үүний гүйцээлт болох минор нь

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

байна.

Квадрат матриц A-ийн хамгийн их эрэмбийн минор нь түүний тодорхойлогч байна.

Тодорхойлолт. *M минорын гүйцээх M' минорыг $(-1)^m$ тэмдэгтэйгээр авсныг M минорын алгебрийн гүйцээлт гэнэ. Энд m нь M минорт орсон мөр, баганын дугааруудын нийлбэр байна.*

Жишээ 1.12. Өмнөх жишээнд авч үзсэн M минорын алгебрийн гүйцээлтийг ол.

Бодолт. M минорын алгебрийн гүйцээлтийг M^* гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $m = 2 + 3 + 3 + 5 = 13$.

$$M^* = (-1)^{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

Тодорхойлолт. *n эрэмбийн A матрицын a_{ij} элемент бүр нэгдүгээр эрэмбийн минор болно. Үүний гүйцээх минор нь $n-1$ эрэмбийн тодорхойлогч байна. Энэ $n-1$ эрэмбийн гүйцээх минорыг a_{ij} элементийн минор гэнэ.* Үүнийг M_{ij} гэж тэмдэглэе. a_{ij} элементийн алгебрийн гүйцээлтийг A_{ij} гэж тэмдэглэе. Алгебрийн гүйцээлтийн тодорхойлолтоос

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

байх нь мөрдөн гарна.

Жишээ 1.13.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

матрицын -3 элементийн алгебрийн гүйцээлтийг олбол

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -(12+35) = -47$$

байна.

1.11. Тодорхойлогчийг мөр баганын элементүүдээр задлах нь

Теорем 1.2. A матрицын тодорхойлогч нь түүний аль нэг мөр (багана)-ийн элементүүдийг тэдгээрийн алгебрийн гүйцээлтээр үржүүлж нэмсэнтэй тэнцүү байна.

Баталгаа. A матрицын тодорхойлогчийг

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad (1)$$

гэж i $(1 \le i \le n)$-р мөрөөр задалж болохыг батлана.

A_{ij} нь $n-1$ эрэмбийн тодорхойлогч учраас $a_{ij}A_{ij}$ нь $(n-1)!$ нэмэгдэхүүнээс тогтоно. Иймд (1) нь $n(n-1)! = n!$ нэмэгдэхүүнийг агуулна.

$a_{ij}A_{ij}$-д орсон бүх нэмэгдэхүүнүүд $\det A$-ийн гишүүн болохыг баталъя.

Тодорхойлогчийн тодорхойлолтоор

$$A_{11} = \sum (-1)^{R(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3}, \dots, a_{n\alpha_n}$$

байх ба

$$a_{11}A_{11} = \sum (-1)^{R(\alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{11} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n}$$

болно. Харин $R(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = R(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$

$$a_{11}A_{11} = \sum (-1)^{R(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{11} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n}$$

нь $\det A$-ийн гишүүд болно.

Хэрэв i, j нь $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ байх дурын тоо бол a_{ij} элементийг 1-р мөр 1-р баганад иртэл мөр баганыг сольж A матрицыг хувирган $\overline{A}$ матриц гаргавал

$$\det A = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det \overline{A} = (-1)^{i+j} \det \overline{A}$$

болох ба

$$a_{ij} A_{ij} = a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{a}_{11} \overline{M}_{11} = (-1)^{i+j} \overline{a}_{11} \overline{A}_{11}$$

$\overline{a}_{11}\overline{A}_{11}$ нь дээр батласнаар $\det \overline{A}$-ийн гишүүд болох нь харагдаж байна. ▲

Жишээ 1.14.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

тодорхойлогчийг хоёрдугаар баганаар задалж бод.

Бодолт. $\Delta = (-5)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 8(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 5 \cdot (-19) + 8 \cdot (-7) - 3 \cdot 10 = -181$$

Теорем 1.2 нь Лапласын теорем гэж нэрлэгдэх дараачийн теоремын тухайн тохиолдол юм. Одоо Лапласын теоремыг баталгаагүйгээр авч үзье.

Теорем 1.3. n эрэмбийн тодорхойлогч нь дурын аргаар сонгогдсон k $(k < n)$ тооны мөр (багана)-ийн элементүүдээр зохиосон бүх боломжит миноруудыг тэдгээрийн алгебрийн гүйцээлтээр үржүүлсэн үржвэрийн нийлбэртэй тэнцүү байна.

Теорем 1.4. Дурын $d_1, d_2, \dots, d_n$ тоонуудыг n эрэмбийн квадрат матрицын аль нэг мөр (багана)-ийн элементүүдийн алгебрийн гүйцээлтээр үржүүлж нэмсэн $d_1 A_{i1} + d_2 A_{i2} + \dots + d_n A_{in}$ нийлбэр нь уул матрицын тэр сонгосон мөр (багана)-ийн элементүүдийг $d_1, d_2, \dots, d_n$-ээр солиход үүсэх матрицын тодорхойлогчтой тэнцүү байна.

Баталгаа.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

дурын квадрат матриц, дурын $d_1, d_2, \dots, d_n$ тоонуудыг авч үзье.

$d_1A_{i1} + d_2A_{i2} + \cdots + d_nA_{in}$ нийлбэр нь

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицыг i-р мөрөөр задалсан задаргаа бодно гэдгийг батлана.

$$d_1A_{i1} + d_2A_{i2} + \cdots + d_nA_{in} = \det A'$$

A' матрицын тодорхойлогчийг i-р мөрөөр задалбал

$$\det A' = d_1D_1 + d_2D_2 + \cdots + d_nD_n$$

болох ба энд D_i $(i = \overline{1,n})$ нь d_i $(i = \overline{1,n})$ элементүүдийн алгебрийн гүйцээлт. Алгебрийн гүйцээлтийн тодорхойлолт ёсоор

$$D_1 = A_{i1}, \quad D_2 = A_{i2}, \quad \dots, \quad D_n = A_{in}$$

байх ба

$$\det A' = d_1A_{i1} + d_2A_{i2} + \cdots + d_nA_{in}$$

болно. ▲

Теорем 1.5. A матрицын аль нэг мөр (багана)-ийн элементүүдийг өөр мөр (багана)-ийн харгалзах элементүүдийн алгебрийн гүйцээлтээр үржүүлж нэмэхэд тэгтэй тэнцэнэ.

Баталгаа. n эрэмбийн $A = (a_{ij})$ матриц өгсөн гэе.

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \qquad i \neq k, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}$$

байхыг баталъя.

Энэ тэнцлийн зүүн тал нь A матрицын i-р мөрийн элементүүдийг k-р мөрийн харгалзах элементүүдийн алгебрийн гүйцээлтээр үржүүлж нэмсэн байна. Теорем 1.4-ийг ашиглавал дээрх тэнцлийн зүүн гар тал нь A матрицын k-р мөрийн элементүүдийг $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$-ээр солиход үүсэх A' матрицын тодорхойлогчтой тэнцүү байна. Тухайлбал:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \det A'$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

байна. A' матрицын i, k-р мөрүүд ижилхэн элементтэй байна. Тодорхойлогчийн 6-р чанараар

$$\det A' = 0$$

болно. Иймд

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$$

болно. ▲

1.12. n эрэмбийн тодорхойлогчийг бодох зарим аргууд

§ 1.12.1. Тодорхойлогчийг мөр, баганын элементээр задлах

Тодорхойлогчийг задлах Теорем 1.3 нь n эрэмбийн тодорхойлогчийг $n-1$ эрэмбийн тодорхойлогч бодоход шилжүүлдэг.

Хэрэв тодорхойлогч тэг элементүүд агуулсан бол аль олон тэг агуулсан мөр баганаар задалбал цөөн тооны тодорхойлогч бодож ажиллагаа хөнгөвчлөгдөнө.

Тодорхойлогчийн чанаруудыг ашиглан боломжтой мөр (багана)-ийн элементүүдийн нэгээс бусдыг тэгтэй тэнцүү болтол нь хувиргаж, тэр мөр (багана)-өөр нь задалж бодвол ердөө $n-1$ эрэмбийн ганцхан тодорхойлогч бодох болно.

Жишээ 1.15. Дараах тодорхойлогчийг бод.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Хоёрдугаар мөр дээр нэгдүгээр мөрийг, гуравдугаар мөр дээр нэгдүгээр мөрийг 2-оор үржүүлж, дөрөвдүгээр мөр дээр нэгдүгээр мөрийг -5-аар үржүүлж нэмбэл

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{II\text{м}+I\text{м}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{III\text{м}+2\cdot I\text{м}}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 16 & 13 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{IV\text{м}+(-5)I\text{м}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 16 & 13 \\ 0 & -8 & -36 & -22 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 16 & 13 \\ -8 & -36 & -22 \end{vmatrix} = -252$$

§ 1.12.2. Тодорхойлогчийг гурвалжин хэлбэрт шилжүүлж бодох

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

хэлбэрийн тодорхойлогчийг гурвалжин хэлбэрийн тодорхойлогч гэнэ. Гурвалжин тодорхойлогч нь зөвхөн гол диагоналийн элементүүдийн үржвэртэй тэнцүү.

Баталгаа. Энэ нь дараах задаргаанаас харагдана.

Δ_1-ийг нэгдүгээр баганаар задалбал

$$\Delta_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

болох ба цаашид гарах тодорхойлогч бүрийг 1-р баганаар нь задалбал

$$\Delta_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\ldots = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{n-2n-2}\begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

гэж батлагдана. ▲

Заримдаа тодорхойлогчийг гурвалжин хэлбэрт шилжүүлж бодох нь тохиромжтой байдаг.

Жишээ 1.16. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}$ тодорхойлогчийг гурвалжин хэлбэрт шилжүүлж бод.

Бодолт.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} \overset{II\text{м}-I\text{м}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} \overset{III\text{м}+I\text{м}}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} \overset{IV\text{м}-2I\text{м}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 2\cdot(-2) = -12$$

§ 1.12.3. Тодорхойлогчийг Лапласын теорем ашиглан бодох

Лапласын теорем нь $n > 2$ эрэмбийн тодорхойлогчийг бага эрэмбийн тодорхойлогчид шилжүүлж бодох боломжийг өгнө. Тодорхойлогчид тэгтэй тэнцүү минорууд байгаа тохиолдолд Лапласын теоремыг хэрэглэж тодорхойлогчийг бодоход тохиромжтой. Энэ тохиолдолд тодорхойлогчид байгаа хамгийн их эрэмбийн тэгтэй тэнцүү миноруудыг ялгах хэрэгтэй болно.

Жишээ 1.17. Дараах тодорхойлогчийг Лапласын теорем ашиглан бод.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -25 & -17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Бодолт.

$$\Delta = \left|\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -25 & -17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

§ 1.12.4. Тулгуур элементийн арга

Энэ аргын мөн чанар нь n эрэмбийн тодорхойлогчийг элементүүд нь хоёрдугаар эрэмбийн тодорхойлогч байх $n-1$ эрэмбийн тодорхойлогчоор илэрхийлэх томъёог дараалан хэрэглэхэд оршино. Хэрэв өгсөн тодорхойлогчийн зүүн дээд булангийн элемент a_{11} тэгээс ялгаатай бол тодорхойлогчийг тулгуур элемент ашиглан бодох арга нь дараах байдалтай байна.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

a_{11} элементийг тулгуур элемент гэнэ. Тулгуур элементээр тодорхойлогчийн дурын тэгээс ялгаатай элементийг авч болно.

$n=3$ үед тулгуур элемент хэрэглэж бодох томъёо нь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

байна. Үүнийг баталъя. Хоёр гуравдугаар мөрийн элементүүдийг a_{11}-ээр үржүүлбэл

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix}$$

болно.

Сүүлчийн тодорхойлогчийн нэгдүгээр мөрийг a_{21}-ээр үржүүлж хоёрдугаар мөрөөс, нэгдүгээр мөрийг a_{31}-ээр үржүүлж гуравдугаар мөрөөс тус тус хасвал

$$\Delta = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix}$$

болно.

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

эдгээрийг тодорхойлогчид орлуулж нэгдүгээр баганаар задалбал

$$\Delta = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

болж гуравдугаар эрэмбийн тодорхойлогчийг тулгуур элемент ашиглан бодох томъёо батлагдав. ▲

Жишээ 1.18. Тодорхойлогчийг тулгуур элементийн арга хэрэглэн бод.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Бодолт. Тулгуур элементээр -1-ийг абвал

$$\Delta = \frac{1}{(-1)^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -5 & -16 & -13 \\ 8 & 36 & 22 \end{vmatrix}$$

сүүлчийн тодорхойлогчид бас дахин тулгуур элементийн арга хэрэглэвэл (тулгуур элемент нь -5)

$$= \begin{vmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -5 & -16 & -13 \\ 8 & 36 & 22 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-5)^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -5 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -5 & -13 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 36 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 8 & 22 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 50 & 30 \\ -132 & -54 \end{vmatrix} = -252$$

болно.

1.13. Матрицуудын үржвэрийн тодорхойлогч

Теорем 1.6. Ижил эрэмбийн хоёр квадрат матрицын үржвэрийн тодорхойлогч нь үржигдэхүүн матрицуудын тодорхойлогчийн үржвэртэй тэнцүү.

Баталгаа. Теоремыг 2-р эрэмбийн квадрат матрицын хувьд баталъя.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

матрицуудын үржвэр

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

байна.

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

гэдгийг батлана. Үүний тулд туслах

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

матрицыг сонгон авъя. C матрицын тодорхойлогчийг бодохдоо Лапласын теорем хэрэглэж эхний хоёр мөрөөр нь задалъя.

$$\det C = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det C = \det A \cdot \det B$$

$\det C$-г өөр аргаар бодъё.

C матрицын нэгдүгээр баганыг b_{11}-ээр, хоёрдугаар баганыг b_{21}-ээр үржүүлж гуравдугаар багана дээр; нэгдүгээр баганыг b_{12}-оор, хоёрдугаар баганыг b_{22}-оор үржүүлж дөрөвдүгээр багана дээр тус тус нэмбэл

$$\det C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11}a_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{12} & a_{22} & b_{11}a_{21} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

болох ба сүүлчийн хоёр мөрийг сонгон авч Лапласын теоремыг хэрэглэвэл

$$\det C = (-1)^{3+4+1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ b_{11}a_{21} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ b_{11}a_{21} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \det(AB)$$

$\det C$-г ийнхүү хоёр аргаар бодоход

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

гарч байна. ▲

Дурын эрэмбийн $n > 2$ матрицын хувьд энэ теоремын баталгааг $n = 2$ үеийнхтэй адилханаар гүйцэтгэнэ.

1.14. Урвуу матриц

Тодорхойлолт. *Хэрэв A матрицын хувьд $AB = BA = E$ (E нэгж матриц) байх B матриц олдож байвал B матрицыг A матрицын урвуу матриц гэнэ.*

Тодорхойлолтоос A, B нь ижил эрэмбийн квадрат матриц болох нь харагдаж байна.

Тодорхойлолт. *Квадрат матриц A-гийн тодорхойлогч нь тэгээс ялгаатай байвал A матрицыг үл бөхөх матриц гэнэ. Хэрэв $\det A = 0$ бол бөхөх матриц гэнэ.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицын элементүүдийн алгебрийн гүйцээлт A_{ij}-ээс бүтэх

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицыг A-тай уялдсан матриц гэнэ.

Лемм 1.1. Хэрэв A нь n эрэмбийн үл бөхөх квадрат матриц, C нь A матрицтай уялдсан матриц бол

$$AC = CA = E \det A, \quad E - \text{нэгж матриц}$$

байна.

Баталгаа.

$$D = AC = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

гэж тэмдэглэвэл D-ийн элемент d_{ij} нь A матрицын i-р мөрийн элементүүдийг C матрицын j-р баганын харгалзах элементүүдээр үржүүлж нэмсэн нийлбэр байна. D-ийн гол диагоналийн элемент d_{ii} нь A матрицын i-р мөрийн элементүүдийг тэдгээрийн алгебрийн гүйцээлтээр үржүүлж нэмсэнтэй тэнцүү байна. a_{ij} нь $i \neq j$ үед A-ийн i-р мөрийн элементүүдийг j-р мөрийн элементүүдийн алгебрийн гүйцээлтээр үржүүлж нэмсэнтэй тэнцүү байна. Иймд Теорем 1.2-ыг хэрэглэвэл

$$D = \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21}A_{21} + \dots + a_{2n}A_{2n} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n1}A_{n1} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \det A & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \det A \end{vmatrix} = \det A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \det A \cdot E$$

үүнтэй адилаар $CA = E \cdot \det A$ байхыг батлана. Ийнхүү $AC = CA = E \det A$ болов. ▲

Теорем 1.7. *A матриц үл бөхөх зөвхөн тэр үед л A матрицын урвуу B матриц олдоно.*

Баталгаа. $\Leftarrow$) A матрицид урвуу B матриц оршдог гэдгээс $\det A \neq 0$ өөрөөр хэлбэл A матриц үл бөхөх матриц гэдгийг харуулъя.

$$AB = E \Rightarrow \det(AB) = \det E \Rightarrow \det A \cdot \det B = \det E = 1$$

Эндээс $\det A \neq 0$. Энэ нь A матриц үл бөхөх гэдгийг заана.

$\Rightarrow$) $\det A \neq 0$ бол A матрицад урвуу матриц оршин байна гэдгийг харуулъя. C матрицыг уялдсан матриц гэвэл Лемм 1.1 ёсоор

$$AC = CA = E \cdot \det A \qquad (*)$$

$\frac{1}{\det A} \cdot C$ нь A-ийн урвуу матриц гэдгийг баталъя.

(∗) илэрхийллээс

$$\frac{1}{\det A}\cdot AC=\frac{1}{\det A}\cdot CA=E\Rightarrow A\Big(\frac{1}{\det A}C\Big)=\Big(\frac{1}{\det A}C\Big)A=E$$

болно. Эндээс $\frac{1}{\det A}C$ нь A матрицын урвуу матриц болох нь харагдаж байна. ▲

A матрицын урвуу матрицыг A^{-1} гэж тэмдэглэж байя. Дээр баталсан теоремоор

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

болох нь харагдаж байна.

Теорем 1.8. Үл бөхөх матрицад зөвхөн ганц урвуу матриц оршин байна.

Баталгаа. Үл бөхөх A матрицад A_1^{-1}, A_2^{-1} гэсэн хоёр урвуу матриц оршдог гэе. $A\cdot A_1^{-1}=E$-ийн 2 талыг зүүн талаас нь A_2^{-1}-ээр үржүүлье.

$$A_2^{-1}AA_1^{-1}=A_2^{-1}\cdot E=A_2^{-1} \tag{1}$$

$A_2^{-1}A=E$-ийн баруун талаас нь A_1^{-1}-ээр үржүүлье. Тэгвэл

$$A_2^{-1}AA^{-1}=EA^{-1}=A^{-1} \tag{2}$$

(1), (2)-ийг авч үзвэл $A_2^{-1}=A_1^{-1}$. ▲

Үл бөхөх матриц дараах чанартай.

Чанар 1. $\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$

Чанар 2. $(A^{-1})^{-1}=A$

Чанар 3. $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

Чанар 4. $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

Жишээ 1.19.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & -3\end{bmatrix}$$

матриц урвуутай эсэхийг тогтоож урвуутай бол урвууг ол.

Бодолт.

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & -3\end{vmatrix}=10\neq 0$$

Иймд A матриц урвуутай.

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$$

байна. Одоо бид A матрицын элементүүдийн алгебрийн гүйцээлтийг олъё.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 2\\ 7 & 3\end{vmatrix}=5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=15,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -3\\ 6 & 7\end{vmatrix}=25,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & -2\\ 7 & -3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 5\\ 6 & 7\end{vmatrix}=9$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14$$

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4\\ 15 & 3 & -8\\ 25 & 9 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4\\ 1,5 & 0,3 & -0,8\\ 2,5 & 0,9 & -1,4\end{bmatrix}$$

Жишээ 1.20.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -7\\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

матрицад урвуу матриц орших эсэхийг тогтоо.

Бодолт.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -7\\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{I\text{м}+III\text{м}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 9 & 2\\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{I\text{м}=IV\text{м}}{=\!=\!=}0$$

$\det A=0$ байх A матрицад урвуу матриц оршихгүй.

1.15. Матрицын ранг

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ эрэмбийн A матрицыг авч үзье.

Тодорхойлолт. *A матрицын тэгээс ялгаатай миноруудын эрэмбийн хамгийн ихийг A матрицын ранг гэнэ.*

Хэрэв A матрицын бүх минор тэгтэй тэнцүү бол A матрицын рангийг тэгтэй тэнцүү гэж үзнэ. Матрицын рангийг $\operatorname{rang} A = r$ гэж тэмдэглэнэ.

Матрицын рангийн тодорхойлолтоос

1. $0 \le r \le \min(m, n)$

2. $r = 0 \Leftrightarrow A = O$

3. A нь n эрэмбийн квадрат матриц бол $r = n \Leftrightarrow A$ үл бөхөх матриц байна.

Жишээ 1.21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ матрицын рангийг ол.

Бодолт. Нэгдүгээр эрэмбийн миноруудын дунд тэгээс ялгаатай элемент байгаа тул $r > 0$. Харин бүх 2, 3-р эрэмбийн минорууд бүгд тэгтэй тэнцүү байна. Иймд $\operatorname{rang} A = 1$ болно.

Рангийн чанаруудыг матрицын рангийг олоход хэрэглэнэ.

Хэрэв k эрэмбийн бүх минорууд тэгтэй тэнцүү бол k-аас их эрэмбийн бүх минорууд (хэрэв оршин байвал) тэгтэй тэнцүү гэдэг нь теорем 1.3-аас мөрдөн гарна. Иймээс r эрэмбийн минорууд дотроос ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай ба $r+1$ эрэмбийн бүх минорууд тэгтэй тэнцүү бол $\operatorname{rang} A = r$ болно.

Эдгээрийг ашиглан ранг хэрхэн олохыг авч үзье.

Хэрэв A матрицын нэгдүгээр эрэмбийн миноруудын ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай бол $\operatorname{rang} A \ge 1$ гэсэн дүгнэлт хийж 2-р эрэмбийн миноруудыг бодоход бүгд тэгтэй тэнцүү гарвал $\operatorname{rang} A = 1$ гэсэн дүгнэлт хийнэ.

Хэрэв хоёрдугаар эрэмбийн минорууд дотроос тэгээс ялгаатай минор ядаж нэг олдвол $\operatorname{rang} A \ge 2$ гэсэн дүгнэлт хийж, гуравдугаар эрэмбийн минoруудыг бодно гэх мэт үргэлжлүүлж k эрэмбийн минoруудаас тэгээс ялгаатай минор олдоод $k+1$ эрэмбийн бүх минор нь тэгтэй тэнцүү байвал $\operatorname{rang} A = k$ гэсэн дүгнэлт хийнэ.

Матрицын ранг нь дараах чанартай. Үүнд:

Чанар 1. Өгсөн A матрицын аль нэг мөр (багана)-ийг дарахад үүсэх A' матрицын ранг нь A матрицын рангтай тэнцүү буюу түүнээс нэг нэгжээр бага байна.

Чанар 2. Өгсөн A матрицад дурын элементүүдээс тогтох мөр (багана)-ийг нэмж бичихэд үүсэх A' матрицын ранг нь өгсөн A матрицын рангтай тэнцүү буюу түүнээс нэг нэгжээр илүү байна.

Чанар 3. Өгсөн A матрицаас тэг мөр (багана)-ийг хасах буюу нэмж бичихэд A матрицын ранг өөрчлөгдөхгүй.

Чанар 4. A матрицын хөрвөсөн A^{T} матрицын ранг нь A матрицын рангтай тэнцүү. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^{\mathrm{T}}$.

1.16. Матрицын эгэл хувиргалт

Дараах хувиргалтыг матрицын эгэл хувиргалт гэнэ. Үүнд:
1. Матрицын аль нэг мөр (багана)-ийг тэгээс ялгаатай тоогоор үржих.
2. Матрицын аль нэг мөр (багана) дээр өөр мөр (багана)-ийг тоогоор үржүүлж нэмэх.
3. Матрицын хоёр мөр (багана)-ийн байрыг солих.

Хэрэв A матрицаас эгэл хувиргалт хийж B матрицыг гаргаад, B матрицаас эгэл хувиргалтаар C матрицыг гаргаж авсан бол A матрицад эгэл хувиргалтыг дараалан хэрэглэж C матрицыг үүсгэлээ гэж үзнэ.

Хэрэв эгэл хувиргалтаар A матрицаас B матрицыг үүсгэсэн бол $A \to B$ гэж бичнэ. Үүнд дараах тэмдэглэлүүдийг хэрэглэнэ.
1. $A \xrightarrow{\alpha s_i} B$ нь A матрицын i-р мөр (багана)-ийг $\alpha \neq 0$ тоогоор үржүүлж B матрицыг үүсгэлээ гэдгийг тэмдэглэдэг.
2. $A \xrightarrow{s_i + \alpha s_j} B$ нь A матрицын i-р мөр (багана) дээр j-р мөр (багана)-ийг $\alpha \neq 0$ тоогоор үржүүлж нэмэхэд B гарна гэдгийг заана.
3. $A \xrightarrow{s_i \leftrightarrow s_j} B$ нь A матрицын i-р мөр (багана)-ийг j-р мөр (багана)-өөр сольж B матриц үүсгэлээ гэдгийг заана.

Лемм 1.2. A матрицын хоёр мөр (багана)-ийн байрыг солих эгэл хувиргалт 3 нь эгэл хувиргалт 1 ба 2-ыг дараалан хэрэглэсэнтэй адилхан.

Баталгаа.

$$A = \begin{bmatrix} \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1j} & \ldots \\ \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2j} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mj} & \ldots \end{bmatrix}$$

матриц өгчээ.

$$A \xrightarrow{k_i+(-1)k_j} A_1 = \begin{bmatrix} \dots & a_{1i}-a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & a_{2i}-a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mi}-a_{mj} & \dots & a_{mj} & \dots \end{bmatrix}$$

$$A_1 \xrightarrow{k_j+k_i} A_2 = \begin{bmatrix} \dots & a_{1i}-a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & a_{2i}-a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mi}-a_{mj} & \dots & a_{mi} & \dots \end{bmatrix}$$

$$A_2 \xrightarrow{k_i+(-1)k_j} A_3 = \begin{bmatrix} \dots & -a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & -a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -a_{mj} & \dots & a_{mi} & \dots \end{bmatrix}$$

$$A_3 \xrightarrow{(-1)k_i} A_4 = \begin{bmatrix} \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mj} & \dots & a_{mi} & \dots \end{bmatrix}$$

A_4-ийг A матрицаас (i, j багануудын байрыг сольж) гаргалаа. Ингэхдээ эхлээд эгэл хувиргалт нэг ба хоёр дараа нь эгэл хувиргалт хоёр дараа нь эгэл хувиргалт нэгийг хэрэглэв. ▲

Теорем 1.9. n эрэмбийн A матрицын багана дээр хийгдэх дурын эгэл хувиргалт нь n эрэмбийн нэгж E матрицын багана дээр мөн тийм эгэл хувиргалтыг хийгээд A матрицын баруун талаас үржүүлсэнтэй тэнцүү.

Баталгаа.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матриц өгчээ. Энэ теоремыг гурван тохиолдолд батлана.

Эгэл хувиргалт 1. A матрицын i-р баганыг $\alpha \neq 0$ тоогоор үржүүлэхэд A^* матриц гардаг гэе. Мөн n эрэмбийн нэгж матрицын i-р баганыг $\alpha \neq 0$

тоогоор үржихэд гарах матрицыг E^* гэе. Тэгвэл

$$E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot E^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \alpha a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \alpha a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \alpha a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \alpha a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^*$$

Эгэл хувиргалт 2. $A \xrightarrow{k_i+\alpha k_j} A^*$, $E \xrightarrow{k_i+\alpha k_j} E^*$ гэе. Тэгвэл $A \cdot E^* = A^*$ гэж батлана.

$$A \cdot E^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + \alpha a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + \alpha a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} + \alpha a_{ij} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} + \alpha a_{jj} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + \alpha a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^*$$

Эгэл хувиргалт 3. нь Лемм 1.2 ёсоор дээрх хувиргалтуудыг дараалан хэрэглэж гарна. ▲

Теорем 1.10. n эрэмбийн A матрицын мөр дээр хийх эгэл хувиргалт нь A матрицын зүүн талаас нь n эрэмбийн нэгж E матрицад мөн тийм хувиргалт хийхэд гарсан матрицаар үржүүлсэнтэй тэнцүү байна.

Энэ теоремын баталгаа нь өмнөх теоремтой адилаар хийгдэнэ.

Теорем 1.11. Үл бөхөх матриц бүхэн багана (мөр) дээр эгэл хувиргалтыг хэрэглэсэний дүнд нэгж матрицад шилждэг.

Баталгаа. Теоремыг матрицын эрэмбийн хувьд индукцээр батлана.

Хэрэв $A = (a_1)$ бол $A \to \frac{1}{a_1}(a_1) = [1] = E$ болно. Ингэж 1-р эрэмбийн матрицын хувьд теорем батлагдав.

$n-1$ эрэмбийн үл бөхөх матрицын хувьд теорем батлагдсан гэж үзээд n эрэмбийн үл бөхөх матрицын хувьд теоремыг баталъя. Үл бөхөх

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицын хувьд I мөрд ядаж нэг тэгээс ялгаатай элемент олдоно. $a_{11} \neq 0$ гэж үзье. A матрицын I баганыг $\frac{1}{a_{11}}$-ээр үржүүлбэл

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

болно. Энэ матрицын I баганыг $-a_{12}$-оор үржүүлж II багана дээр, I баганыг $-a_{13}$-аар үржүүлж III багана дээр нэмэх гэх мэт үргэлжлүүлбэл

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{n\ б + (-a_{1n})Iб}]{\substack{IIб + (-a_{12})Iб \\ IIIб + (-a_{13})Iб \\ \dots}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a'_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \overline{A}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{23} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

нь үл бөхөх матриц. Хэрэв B бөхөх матриц бол A матрицыг хувиргаад гарсан сүүлчийн $\overline{A}$ матрицын тодорхойлогчийг I мөрөөр задлахад тэгтэй тэнцэнэ. Энэ нь A бөхөх матриц гэдгийг заана. Иймд B нь $n-1$ эрэмбийн үл бөхөх матриц тул индукцийн ёсоор B-г

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

болтол нь хувиргана. Тэгвэл

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a'_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

болно. Сүүлийн гарсан A матрицын II баганыг $-a'_{21}$, III баганыг $-a'_{31}$-ээр гэх мэтчилэн n-р баганыг $-a'_{n1}$-ээр үржүүлж I багана дээр (тус бүрийг) нэмэхэд A матриц нэгж матрицад шилжинэ.

Үүнтэй адилаар үл бөхөх матрицыг зөвхөн мөр дээр хийх эгэл хувиргалтаар нэгж матрицад шилжүүлж болно. ▲

Мөрдлөгөө. Дурын үл бөхөх матрицыг нэгж матрицын зөвхөн багана (мөр) дээр эгэл хувиргалт хийх замаар гарган авч болно.

Теорем 1.12. Матрицын эгэл хувиргалтаар матрицын ранг өөрчлөгдөхгүй.

Баталгаа. $m \times n$ эрэмбийн A матрицын ранг эгэл хувиргалт 1 ба 2-д өөрчлөгдөхгүй гэдгийг л батлахад хүрэлцээтэй.

A матрицын i-р багана (мөр)-ыг λ тоогоор үржүүлж B матриц гаргая.

$$A \xrightarrow{\lambda s_i} B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \lambda a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \lambda a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ гэж баталъя.

B матрицын i-р баганын элементүүдийг агуулаагүй минорууд нь A матрицын i-р баганын элементүүдийг агуулаагүй минорuudтай харгалзан давхцана. B-ийн i-р баганын элементүүдийг агуулсан минор нь A матрицын i-р баганын элементүүдийг $\lambda \neq 0$ тоогоор үржүүлсэн минортой давхцана. Иймд A, B матрицуудын харгалзах минорuudын тэгтэй тэнцэх эсэх нь адилхан байна. Иймээс $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ болно.

Эгэл хувиргалт 2-ыг хэрэглэн A матрицын i-р багана дээр j-р баганыг λ тоогоор үржүүлж нэмээд C матрицыг гаргасан гэе.

$$A \xrightarrow{s_i+\lambda s_j} C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}+\lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi}+\lambda a_{mj} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rang} A = r$ гэе. $\operatorname{rang} C = r$ гэж баталъя. Дараах хоёр тохиолдол байна.

1. A матрицын i-р баганын элементүүдийг агуулаагүй r эрэмбийн минорууд дотор тэгээс ялгаатай M минор олдох тохиолдол. C матриц нь A-гаас зөвхөн i-р баганаараа ялгагдах тул M минор нь C матрицын r эрэмбийн тэгээс ялгаатай минор болно.

2. A матрицын i-р баганын элементүүдийг агуулаагүй r эрэмбийн бүх минорууд тэгтэй тэнцүү байх тохиолдол. Тэгвэл i-р баганын элементүүдийг агуулсан r эрэмбийн минорууд дотор тэгээс ялгаатай M минор байна. M' нь M минор A матрицад яаж байрласантай адилаар C матрицад байрлах минор гэе. C матрицын i-р баганын элементүүд нь хоёр элементийн нийлбэр учраас $M' = M_1 + M_2$ болно.

Хэрэв j-р баганын элементүүдийг M минор агуулдаг бол M_2 минор нь хоёр пропорциональ баганатай болох ба $M_2 = 0$. C-ийн j-р баганын элементүүд M'-д ордоггүй бол минор M_2 нь A матрицын i-р баганын элементийг агуулаагүй минорыг λ тоогоор үржүүлсэн үржвэр байна. Иймд $M_2 = 0$ ба ямар ч тохиолдолд $M = M'$ болж байна. Иймд C матриц нь r эрэмбийн тэгээс ялгаатай минор агуулна. C матрицын $r+1$ эрэмбийн бүх минор тэгтэй тэнцүү гэдгийг үүнтэй адилаар батлана. Иймд $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. ▲

Энэ теорем нь матрицын ранг олох боломж олгоно. Эгэл хувиргалтуудыг хэрэглэн тэгээс ялгаатай A матрицыг

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n}\\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3r} & \dots & b_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ бүгд тэгээс ялгаатай хэлбэрт оруулж болно. B матрицын бүх тэг элементээс тогтох мөрүүдийг орхивол r мөртэй B матриц үүснэ. Үүний ранг нь r-тэй тэнцүү байна. A матрицаас эгэл хувиргалт хэрэглэж B-г гаргасан тул $\operatorname{rang} A = r$ болно.

Жишээ 1.22.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5\\ 3 & -1 & 4 & -2\\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

матрицын рангийг ол.

Бодолт.

$$A \xrightarrow[\ ]{\substack{s_2+(-3)s_1\\ s_3+(-5)s_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -7 & -5 & -17\\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3+(-1)s_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -7 & -5 & -17\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Эндээс $\operatorname{rang} A = 2$.

Тэг биш A матриц бүхнийг эгэл хувиргалт хэрэглэн

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

хэлбэрт оруулдгийг дээр баталсан. Ийм хэлбэрийн матрицыг трапец хэлбэртэй матриц гэнэ. Ийм матрицын ранг нь энэ матрицад байгаа нэг гэсэн цифрийн тоотой тэнцүү байна.

Теорем 1.13. Хэрэв A матрицыг зүүн буюу баруун талаас нь үл бөхөх матриц B-ээр үржүүлэхэд гарах AB, BA матрицын ранг нь A матрицын рангтай тэнцүү. Өөрөөр хэлбэл $\det B \neq 0$ бол $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A$.

Баталгаа. Үл бөхөх B матрицыг эгэл хувиргалтаар E нэгж матрицаас гаргаж болдог тул A матрицыг зүүн талаас нь үл бөхөх B матрицаар үржих нь A-ийн багана дээр эгэл хувиргалтууд хийхтэй адил юм. Теорем 1.12-ыг хэрэглэвэл $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A$ буюу $\operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A$. ▲

1.17. Эгэл хувиргалт хэрэглэн урвуу матриц олох нь

Үл бөхөх матрицыг зөвхөн багана (мөр) дээр эгэл хувиргалт хэрэглэн нэгж E матрицад шилжүүлж болдгийг дээр баталсан билээ.

Теорем 1.14. Үл бөхөх n эрэмбийн A матрицыг нэгж матрицад шилжүүлэх эгэл хувиргалтуудыг n эрэмбийн нэгж E матриц дээр хийхэд гарсан B матриц нь A матрицын урвуу матриц байна.

Баталгаа. A үл бөхөх матриц. A матрицыг зөвхөн багана (мөр) дээр эгэл хувиргалтууд хийж нэгж E матриц гарсан гэе. A матрицад хийсэн эдгээр эгэл хувиргалтаа нэгж E матрицад хэрэглэе. Ингэхэд нэгж матриц нь B матрицад шилжсэн гэе. Тэгвэл $AB = E$ болно. Эндээс $B = A^{-1}$ байна. ▲

Жишээ 1.23. Эгэл хувиргалт хэрэглэн матрицын урвуу матрицыг ол.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Бодолт. A матрицын зөвхөн багана дээр $\frac{1}{2}s_1$, $s_3 - 4s_1$, $-s_2$, $s_1 - \frac{1}{2}s_2$, $\frac{1}{5}s_3$, $s_1 - \frac{1}{2}s_3$, $s_2 + 2s_3$ хувиргалтуудыг дараалан хийж A матрицыг нэгж матрицад шилжүүлнэ. Дээрх хувиргалтуудыг A-тай ижил эрэмйин нэгж матриц дээр хийхэд A-ийн урвуу матриц гарна.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}s_1}{=\!=} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3-4s_1}{=\!=}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-s_2}{=\!=} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1-\frac{1}{2}s_2}{=\!=}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{5}s_3}{=\!=} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \overset{s_1-\frac{1}{2}s_3}{=\!=}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \overset{s_2+2s_3}{=\!=} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Эндээс $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ болно.

Шалгавал $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.18. Суурь минорын тухай теорем

Хэрэв A матрицын i-р мөр (багана) нь өөр k ширхэг мөр (багана)-үүдийг харгалзан $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (ядаж нэг $a_i \neq 0$) тоогоор үржүүлж нэмсэн хэлбэртэй байвал i мөр (багана)-ийг тэр k ширхэг мөр (багана)-үүдийн шугаман эвлүүлэг болж байна гэдэг.

Тодорхойлолт. *$A_{\ell \times p}$ матрицын $s_1, s_2, \dots, s_\ell$ $(\ell > 1)$ мөрүүдийн ядаж нэг нь бусдынхаа шугаман эвлүүлэг болж байвал эдгээр мөрүүдийг шугаман хамааралтай, эсрэг тохиолдолд шугаман хамааралгүй мөрүүд гэнэ.*

Үүнтэй адилаар багануудын шугаман хамааралтай, хамааралгүй тодорхойлно. Жишээлбэл:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

матрицын хоёрдугаар мөрийг 2-оор үржүүлж нэгдүгээр мөр дээр нэмэхэд гуравдугаар мөр гарч байгаа учраас $(III_{\text{м}} = I_{\text{м}} + 2II_{\text{м}})$ 3-р мөр нь нэг, хоёрдугаар мөрийн шугаман эвлүүлэг болж байна. Иймд энэ матрицын эхний гурван мөр шугаман хамааралтай байна.

Хэрэв $m \times n$ эрэмбийн A матрицын аль нэг мөр (багана) нь өөр бусад k $(k < m - 1)$ мөр (багана)-үүдийн шугаман эвлүүлэг болж байвал бусад үлдсэн бүх мөр (багана)-үүдийнхээ шугаман эвлүүлэг болно. Тухайлбал, дээрх жишээний 3-р мөр бусад мөрүүдийнхээ шугаман эвлүүлэг болно.

Хэрэв $A_{m \times n}$ матрицын n-р багана нь бусад багануудынхаа шугаман эвлүүлэг болдог бол дараах нөхцлийг хангах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ тоонууд олдоно. Үүнд:

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_{n-1} \begin{bmatrix} a_{1\,n-1} \\ a_{2\,n-1} \\ \vdots \\ a_{m\,n-1} \end{bmatrix}$$

Үүнтэй адилаар $A_{m\times n}$ матрицын i-р мөрийг бусад мөрөөр задалбал (шугаман эвлүүлэг болж байвал)

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1j} + \alpha_{i+1} a_{i+1j} + \dots + \alpha_n a_{nj}$$

болно.

Тодорхойлолт. *A матрицын k эрэмбийн M минорыг агуулдаг $k+1$ эрэмбийн минорыг k эрэмбийн M минорын эмжигч минор гэнэ. Эрэмбэ нь матрицын рангтай тэнцүү байх тэгээс ялгаатай минорыг суурь минор гэнэ.*

$A \neq O$ матрицад суурь минор олдоно. Гэхдээ мэдээж нэг утгатай биш.

Огтлолцол дээр нь суурь минорын элементүүд орших мөр багануудыг матрицын суурь мөр багана гэнэ.

Теорем 1.15. **а)** A матрицын дурын мөр (багана) нь суурь мөр (багана)-үүдийн шугаман эвлүүлэг байна.
б) Суурь мөр (багана)-үүд шугаман хамааралгүй байна.

Баталгаа. A матрицын суурь минорыг M, $\operatorname{rang} A = r$ гэе.

а) Суурь минорыг A матрицын зүүн дээд буланд байрлуулахаар авъя.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

$1 < j \leq n$ байх j сонгон авч (бэхлээд)

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} \qquad (i = \overline{1,m})$$

тодорхойлогчуудыг авч үзье. i, j тоонуудын ядаж нэг нь r-ээс бага бол Δ_{ij} нь хоёр ижил мөр (багана)-тэй болж тэгтэй тэнцэнэ ($\Delta_{ij} = 0$).

$i > r$ мөн $j > r$ бол Δ_{ij} нь A матрицын $r+1$ эрэмбийн минор болох тул $\Delta_{ij} = 0$ байна. Δ_{ij} тодорхойлогчийг сүүлчийн мөрөөр задлавал

$$\Delta_{ij} = \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2} + \dots + \alpha_r a_{ir} + \alpha_{r+1} a_{ij} = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r, \alpha_{r+1}$$

нь Δ_{ij}-ийн сүүлчийн мөрийн элементүүдийн алгебрийн гүйцээлт юм.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ нь i-ээс хамаарахгүй α_{r+1} нь M-тэй тэнцүү ба i, j-үүдээс хамаарахгүй, $M \neq 0$ гэдгээс

$$a_{ij} = \beta_1 a_{i1} + \beta_2 a_{i2} + \dots + \beta_r a_{ir} \qquad (i = \overline{1, m})$$

болох ба $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{M}$ байна. Энэ нь A матрицын j-р багана M минорт орсон багануудын шугаман эвлүүлэг гэдгийг харуулж байна.

Үүнтэй адилаар A матрицын мөр бүр нь суурь мөрүүдийн шугаман эвлүүлэг байна гэж батална.

б) Суурь мөрүүдийг шугаман хамааралтай юм гэе. Тэгвэл суурь мөр (багана)-үүдийн нэг нь бусад үлдсэн суурь мөр (багана)-үүдийн шугаман эвлүүлэг болно. M минорын шугаман эвлүүлэг болсон мөрийг M-д орлуулахад тодорхойлогчийн 4 чанараар ижил мөртэй тодорхойлогчууд үүсэж M минор тэгтэй тэнцүү болно. Энэ нь $M \neq 0$ гэдэгт харшилж байна. Иймд суурь мөрүүд шугаман хамааралгүй байна. ▲

Мөрдлөгөө 1. Суурь биш мөр (багана) суурь мөр (багана)-үүдийн шугаман эвлүүлэг байна.

Мөрдлөгөө 2. Шугаман хамааралгүй мөр (багана)-үүдийн максималь тоо матрицын рангтай тэнцүү байна.

Мөрдлөгөө 3. Матрицын тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний аль нэг мөр (багана) нь бусад мөр (багана)-үүдийнхээ шугаман эвлүүлэг байх явдал юм.

1.19. Матрицын ранг олох эмжих минорын арга

1.18-д судалсан суурь минорын тухай теоремоос A матрицын r эрэмбийн тэгээс ялгаатай M минорын бүх эмжигч минорууд нь тэгтэй тэнцүү буюу оршихгүй байвал A матрицын ранг r-тэй тэнцүү байна гэж мөрдөн гарна. Иймд A матрицын рангийг олохын тулд бүх эмжигч минорууд нь тэгтэй тэнцүү байх M минорыг олоход хүрэлцээтэй.

Жишээ 1.24. Дараах матрицын рангийг ол.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Бодолт. A матрицын зүүн дээд булангийн минорыг сонгох нь тохиромжтой тул $M = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ минорыг сонгов. M минорыг эмжигч минорууд

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 15 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -15 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

бүгд тэгтэй тэнцүү тул $\operatorname{rang} A = 2$.

1.20. Дасгал ба бодлогууд

№1. **а)** 2, 3, 4, 5 эрэмбийн тэгш хэмтэй, тэг, дээд, доод гурвалжин, диагональ, нэгж матрицуудыг бичиж, эрэмбэ, гол ба хажуугийн диагональ дээр орших элементүүдийг заа.

б) Мөр, багана матрицууд бичиж, эрэмбэ, тэмдэглэлийг бич.

в) n эрэмбийн квадрат нэгж, диагональ, гурвалжин, тэгш хэмтэй матриц тус бүр хоёрыг бич.

г) a_{11}, a_{25}, a_{57} элементүүд $A_{m\times n}$ матрицад хаана байрлах вэ?

№2. **а)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ бол $3A+2X = E$ тэнцлийг хангах X матрицыг ол.

б) $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & -12 & -7 \end{bmatrix} + 3 \cdot X = 5 \cdot \begin{bmatrix} -8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

байх X матрицыг ол.

в) Өөрсдөө дээрхтэй төсөөтэй тэгшитгэл зохиож бод.

№3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ бол $2A$, $3B$, $-A$, $-B$, $A+B$, $A-B$, $B-A$ матрицуудыг ол.

№4. $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 3}$ матрицуудын хувьд

а) $A\cdot B$, **б)** BA, **в)** AC, **г)** CA,

д) ABC, **е)** ACB, **ж)** CB, **з)** CBA

үржвэрүүд тодорхойлогдох уу? Тодорхойлогдох бол эрэмбийг ол.

5–6-р бодлогуудад матрицын үржвэрийг ол.

№5. **а)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

№6. **а)** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$

№7. **а)** $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

№8. **а)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}^3$ **в)** $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n$

№9. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$ матрицууд өгчээ. AD, DA үржвэрийг ол. Ямар нөхцөлд $AD = DA$ биелэх вэ?

№10. A, B нь байр сольдог матрицууд бол $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ байхыг батал.

№11. $AB = AC$ бол $B = C$ байх уу?

№12. Хэрэв A матрицын I, II мөрүүд тэнцүү бол AB матрицын I, II мөр мөн тэнцүү гэдгийг батал.

№13. **а)** Хэрэв A, B матрицуудын хувьд AB, BA тодорхойлогдоод $AB = BA$ бол A, B матрицууд квадрат, ижил эрэмбэтэй болохыг батал.

б) Хэрэв A нь диагональ матриц ба түүний гол диагоналийн элементүүд тэгээс ялгаатай бол A матрицтай байр сольдог дурын матриц нь диагональ болохыг батал.

в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ матрицуудтай байр сольдог матрицыг ол.

№14. **а)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^2$ **б)** $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$ **в)** $\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix}^n$ бод.

№15. **а)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n$ **б)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^3$ бод.

16–18-р бодлогуудад A матриц, $f(x)$ олон гишүүнт өгөгджээ. $f(A)$-г ол.

№16. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ матриц, $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$.

№17. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ матриц, $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 8$.

№18. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ матриц, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ өгөгдсөн бол $f(A) = 0$ байх уу?

№19. **а)** $(8\ 1\ 3\ 6\ 5\ 7\ 4\ 2)$, **б)** $(5\ 8\ 9\ 2\ 1\ 4\ 3\ 6\ 7)$, **в)** $(4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3)$, **г)** $(2\ 1\ 4\ 3\ \dots\ 2n\ 2n-1)$, **д)** $(2\ 3\ 1\ 5\ 6\ 4\ \dots\ 3n-1\ 3n\ 3n-2)$ сэлгэмлүүдийн тэгш сондгойг тогтоо.

№20. Тодорхойлогчийг бод.

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$ **в)** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix}$ **д)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

е) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$ **ж)** $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$ **з)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

№21. **а)** $a_{31}a_{56}a_{24}a_{45}a_{63}a_{12}$ үржвэр хэддүгээр эрэмбийн тодорхойлогчийн гишүүн бэ? Ямар тэмдэгтэй вэ?

б) $a_{41}a_{53}a_{32}a_{13}a_{24}$ нь 5-р эрэмбийн тодорхойлогчийн гишүүн мөн үү? Тайлбарла.

в) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ матрицын тодорхойлогч хэдтэй тэнцэх вэ?

№22. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ матрицын

а) I, II, IV мөр, I, III, IV баганаар тодорхойлогдох M минорыг ол.
б) M минорын гүйцээх минорыг ол.
в) M минорын алгебрын гүйцээлтийг ол.
г) Өөрсдөө ийм дасгал бодлого зохиож бод.

Дараах тодорхойлогчдыг тодорхойлогчийн чанар ашиглан бод.

№23. а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 9 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

№24. а) $\begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 2790 & 3454 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$ **в)** $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$

№25. а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -10 \\ 25 & 3 & 7 & -210 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sin x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{3}$ тэгшитгэлийг бод.

№26. а) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 16 & 7 & 5 & 9 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 9 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 6 & 7 \\ -1 & 19 & -2 & 18 & 11 \\ -1 & 5 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Дараах тодорхойлогчуудыг мөр баганаар нь задалж бод.

№27. а) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

№28. а) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

№29. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ тодорхойлогчийг 1 ба 3-р мөрөөр задлан бод.

№30. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ тодорхойлогчийг 1 ба 2-р баганаар задлан бод.

№31. **а)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -10 \\ 25 & 13 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ тодорхойлогчуудыг чанар болон мөрөөр задалж бод.

№32. $A \xrightarrow{5S_1} B \xrightarrow{S_2-S_1} C$ бол $\det A$, $\det C$ ямар холбоотой байх вэ?

№33. A нь n эрэмбийн квадрат матриц бол $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det A^2$-ийг $\det A$-аар илэрхийл.

34–37-р бодлогууд хэрэв урвуу матриц оршдог бол урвуу матрицыг ол.

№34. **а)** $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

№35. **а)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

№36. **а)** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

№37. **а)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

№38. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ матрицын урвууг ол.

№39. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ матрицууд өгөгдсөн бол A матрицыг ол.

№40. Хэрэв $A^2 = O$ бол $A+E$, $E-A$ матрицууд үл бөхөх матрицууд ба харилцан урвуу болохыг батал.

№41. Хэрэв $A^3 = O$ бол $A+E$ ба $A^2 - A + E$ нь үл бөхөх матрицууд ба харилцан урвуу болохыг батал.

№42. A-квадрат матриц ба $A^2 - A + E = O$ бол A үл бөхөх матриц болохыг баталж A^{-1}-г ол.

№43. A нь үл бөхөх ба $B \neq O$ матрицууд бол $AB \neq O$ гэдгийг батал.

№44. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ матрицад урвуу матриц орших эсэхийг тогтоож, урвууг ол.

№45. Хэрэв $B = T^{-1}AT$ бол $\det B = \det A$ байхыг батал.

№46. Үл бөхөх гурвалжин матрицын урвуу матриц нь гурвалжин матриц байхыг батал.

№47. Квадрат нь нэгж матриц байх бүх 2-р эрэмбийн матрицуудыг ол.

№48. Хэрэв A, B нь n эрэмбийн матрицууд, $AB = O$ ба $B \neq O$ бол $CA = E$ байх n эрэмбийн C матриц олдохгүй гэдгийг батал.

№49. A матрицын бүх элемент нь бүхэл тоо ба $\det A = 1$ бол A^{-1} матрицын бүх элемент бүхэл ба $\det A^{-1} = 1$ болохыг батал.

№50. Хэрэв $A = (a_{ij})$ нь n эрэмбийн үл бөхөх матриц бол $A^{-1}k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ болохыг батал (k_1 нь A матрицын I багана).

№51. A үл бөхөх матриц, $A \xrightarrow{S_i \leftrightarrow S_j} B$ $(i \neq j)$ гэе. Тэгвэл $A^{-1} \xrightarrow{k_i \leftrightarrow k_j} B^{-1}$ болохыг батал.

52–53-р бодлогуудад X матрицыг ол.

№52. **а)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ **б)** $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

№53. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ матрицууд өгөгдсөн бол $AX + B = C$ байх X матрицыг ол.

№54. A матрицын мөр бүрийн элементүүдийн нийлбэр тэгтэй тэнцүү бол $\det A = 0$ гэдгийг батал.

№55. n эрэмбийн A, B матрицууд зөвхөн j-р баганаараа ялгаатай бол $\det(A+B) = 2^{n-1}(\det A + \det B)$ болохыг батал.

№56. **а)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)$

б) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)$ болохыг батал.

№57. Дараах тодорхойлогчуудыг Лапласын теорем ашиглан бод.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **г)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$

№58. Тулгуур элементийн арга хэрэглэн дараах тодорхойлогчуудыг бод.

а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & -4 & 6 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **г)** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

№59. Тодорхойлогчуудыг гурвалжин хэлбэрт шилжүүлж бод.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ -1 & 0 & 5 & \dots & 2n-1 \\ -1 & -3 & 0 & \dots & 2n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & -3 & -5 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **г)** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 5 \end{vmatrix}$

№60. Дараах матрицан тэгшитгэлийг бод.

а) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

б) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

г) $X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$

61–64-р бодлогууд суурь миноруудын нэгийг ол.

№61. **а)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

№62. **а)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 10 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -17 & 0 \end{bmatrix}$

№63. **а)** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

№64. **а)** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

№65. $A_{4\times 4}$ матрицын тодорхойлогч тэгээс ялгаатай бол $\operatorname{rang} A$ хэдтэй тэнцэх вэ?

№66. A үл бөхөх матриц бол түүний ранг ямар тоо байх вэ?

№67. Дараах матрицын рангийг минорыг эмжих аргаар ол. Суурь минор, суурь мөр баганыг заа.

а) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ г) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

№68. Эгэл хувиргалт хийж дараах матрицын рангийг ол (Суурь минорuудын нэгийг ол).

а) $\begin{bmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 94 & 27 & 15 & 120 \\ 18 & 53 & 28 & 30 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ г) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

д) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ е) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

№69. Эгэл хувиргалт хэрэглэн дараах матрицуудын урвууг ол.

а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ г) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

д) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ е) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

№70. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ матрицын суурь мөр багануудыг олж, суурь биш мөрийг суурь мөрөөр, суурь биш баганыг суурь баганаар задал.

Хариу

2. а) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -9 \\ -6 & -4 & 12 \\ -3 & 3 & -7 \end{bmatrix}$, **б)** $\begin{bmatrix} -14 & -3 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ -9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **9.** 1. D матриц хэвээр, A диагональ матриц, 2. $d_1 = d_2 = \ldots = d_n$, A дурын квадрат матриц бол $AD = DA$ байна. **11.** Үгүй **14. а)** $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$ **15. а)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ **25. а)** 0, **б)** $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ **31. а)** -119, **б)** 0 **33.** $\det(2A) = 2^n \det A$, $\det(-A) = (-1)^n \det A$, $\det A^2 = (\det A)^2$ **37. а)** $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ **39.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ -9 & \frac{16}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}$ **47.** E ба $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $a^2 + bc = 1$

57. а) -21, **б)** 90, **в)** 1000, **г)** $(x_4-x_3)(x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)$

58. а) -185, **б)** -6, **в)** -3, **г)** 100 **59. а)** $n!$, **б)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$, **в)** $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \cdot (n-1)$, **г)** $2^{n-1}(3n+2)$ **60. а)** $\begin{bmatrix} \frac{2+3c_1}{2} & \frac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$, $c_1, c_2 \in K$.

II бүлэг. Шугаман тэгшитгэлийн систем

2.1. Шугаман тэгшитгэлийн системийн матрицан бичлэг

Тодорхойлолт. *n үл мэдэгдэгчтэй m тэгшитгэлийн*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

(a_{ij}, b_i ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) тоонууд) ийм хэлбэртэй системийг шугаман тэгшитгэлийн систем гэнэ. Энд a_{ij} нь i-р тэгшитгэлийн j-р үл мэдэгдэгч (x_j)-ийн коэффициент.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

матрицыг системийн үндсэн матриц,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

матрицыг системийн өргөтгөсөн матриц гэнэ.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ гэж тэмдэглэвэл (2.1) системийг

$$A \cdot X = B \tag{2.2}$$

гэж бичнэ. Энэ бичлэгийг (2.1) системийн матрицан хэлбэр гэнэ. Мөн (2.1) системийг

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

гэж матрицан хэлбэртэй бичиж болно.

2.2. Системийн шийд, шугаман тэгшитгэлийн тэнцүү чанартай системүүд

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Систем (2.1)-ийн $x_1, x_2, \dots, x_n$-ийн оронд орлуулахад (2.1) системд орсон тэгшитгэл бүрийг үнэн тэнцэтгэлд шилжүүлэх $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ гэсэн эрэмбэлэгдсэн тоонуудын системийг (2.1) системийн шийд гэнэ. Шийдийг*

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

гэсэн матриц хэлбэртэй бичиж болно.

Хэрэв систем (2.1) нь ядаж нэг шийдтэй бол түүнийг нийцтэй, эсрэг тохиолдолд нийцгүй гэж нэрлэнэ. Систем нь цор ганц шийдтэй бол түүнийг тодорхой, нэгээс илүү шийдтэй бол тодорхой биш систем гэнэ. Системийг бод гэдэг нь уг системийн нийцтэй эсэхийг тогтоож, нийцтэй бол бүх шийдийг олохыг хэлнэ.

Жишээ 2.1.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

систем нь $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{8})$ гэсэн ганц шийдтэй тул нийцтэй тодорхой систем юм.

Жишээ 2.2. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$ гэсэн ганц тэгшитгэлээс тогтох систем нь нийцтэй тодорхой биш байна. $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 = 4 - 2c_1 + 3c_2$ болох ба шийд нь $\{c_1,\ c_2,\ 4 - 2c_1 + 3c_2,\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

Жишээ 2.3.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

систем нийцгүй.

Хэрэв (2.1) системд $a_{ij} = 0$, $b_i = 0$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ бол (2.1) нь төгсгөлгүй олон шийдтэй, бүх $a_{ij} = 0$ үед ядаж нэг $b_i \neq 0$ бол (2.1) нь нийцгүй систем байна.

Шугаман тэгшитгэлийн хоёр системийн нэгнийх нь шийд бүр нөгөөгийнхөө шийд болж байвал өөрөөр хэлбэл шийдүүдийн олонлог нь ижил байвал хоёр системийг тэнцүү чанартай (эквивалент) гэнэ.

Системийг хувиргах дараах

1. Системийн аль нэг тэгшитгэлийг тэгээс ялгаатай тоогоор үржүүлэх

2. Системийн аль нэг тэгшитгэл дээр өөр нэг тэгшитгэлийг тэгээс ялгаатай тоогоор үржүүлж нэмэх

3. Системийн хоёр тэгшитгэлийн байрыг солих хувиргалтуудыг эгэл хувиргалт гэнэ.

Системийн эгэл хувиргалтууд нь өргөтгөсөн матрицын харгалзах мөр дээр хийх хувиргалт гэдгийг хялбархан харж болно.

Эгэл хувиргалт хийж гаргасан систем нь өгсөн системтэй тэнцүү чанартай гэдгийг баталж болно.

2.3. Үл бөхөх шугаман тэгшитгэлийн системийн шийд. Крамерийн томъёо

n үл мэдэгдэгчтэй n шугаман тэгшитгэлийн систем авч үзье.

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Энэ системийг матрицан хэлбэрт бичвэл

$$AX = B \tag{2.5}$$

Системийн матрицын

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

тодорхойлогчийг (2.4) системийн тодорхойлогч гэнэ.

Хэрэв $\det A \neq 0$ бол системийг үл бөхөх, эсрэг тохиолдолд бөхөх систем гэнэ.

Үл бөхөх ($\det A \neq 0$) систем (2.4)-ийн шийдүүдийг олъё. Системийн матриц үл бөхөх учраас түүнд цор ганц урвуу A^{-1} олдоно. (2.5) системийн хоёр талыг зүүн талаас нь A^{-1} матрицаар үржүүлж, $A^{-1}A = E$, $EX = X$ байдгийг харгалзан үзвэл

$$X = A^{-1}B \tag{2.6}$$

(2.6) нь авч үзэж буй системийн шийдийн матрицан бичлэг юм. (2.6)-г

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

буюу

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

гэж бичиж болно. Эндээс $\forall j$ $(j = \overline{1,n})$-ийн хувьд

$$x_j = \frac{1}{\Delta}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n)$$

байна.

1.11-ийн теорем 1.4-д судалснаар

$$A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n$$

нь Δ тодорхойлогчийн j-р баганыг системийн сул гишүүний баганаар солиход гарсан тодорхойлогч байна. Өөрөөр хэлбэл:

$$A_{1j}b_1 + \cdots + b_nA_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_j$$

байна. Иймд

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1,n}) \tag{2.7}$$

(2.7) томъёог Крамерийн томъёо гэж нэрлэнэ. (2.6) нь Крамерийн томъёоны матрицан тавилт юм.

Үл бөхөх A матрицад урвуу матриц зөвхөн ганц олдох учир (2.6) нь зөвхөн ганц байна. Иймд n үл мэдэгдэгчтэй n шугаман тэгшитгэлийн үл бөхөх систем нь ганц шийдтэй байх ба түүний шийдийг Крамерийн томъёогоор олно.

Жишээ 2.4. Системийг матрицан хэлбэрт бичиж бод.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= b_1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

а) $b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = -1$
б) $b_1 = b_2 = 0,\ b_3 = 5$ тохиолдолд бод.

Бодолт. Системийн матриц нь

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

байна.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Системийн матрицын урвуу матриц нь

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix}$$

болно. Системийн шийд нь

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -0,5b_1 + 0,1b_2 + 0,4b_3$
$x_2 = 1,5b_1 + 0,3b_2 - 0,8b_3$
$x_3 = 2,5b_1 + 0,9b_2 - 1,4b_3$ болно.
а) тохиолдолд $x_1 = -0,5 + 0,1 \cdot 2 + 0,4 \cdot (-1) = -0,7$
$x_2 = 1,5 + 0,3 \cdot 2 - 0,8 \cdot (-1) = 2,9$
$x_3 = 2,5 + 0,9 \cdot 2 - 1,4 \cdot (-1) = 5,7$
б) тохиолдолд $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = -7$ байна.

2.4. Кронекер-Капеллийн теорем

n үл мэдэгдэгчтэй m тэгшитгэлийн (2.1) системийг авч үзье.

Теорем 2.1 (Кронекер-Капелл). Шугаман тэгшитгэлийн (2.1) систем нийцтэй байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь системийн матрицын ранг өргөтгөсөн матрицын рангтай тэнцүү байх явдал юм. Өөрөөр хэлбэл (2.1) систем нийцтэй $\iff \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$.

Баталгаа. (2.1) системийг (2.3) хэлбэрт бичье.

$\Rightarrow$: Өөрөөр хэлбэл (2.1) систем нийцтэй бол $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$ байхыг баталъя. Энд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

(2.1) системийн шийдийг $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ гэвэл

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} c_2 + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} c_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

биелнэ. Энэ нь $\overline{A}$ матрицын сүүлчийн багана нь бусад багануудынхаа шугаман эвлүүлэг болж байгааг заана. $\overline{A}$ матрицын сүүлчийн баганаас бусад багануудын дээрх шугаман эвлүүлгийг хасвал

$$\overline{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

болно. Эндээс $\operatorname{rang} \overline{A_1} = \operatorname{rang} \overline{A} = \operatorname{rang} A$ болох нь харагдаж байна.

$\Leftarrow$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$ бол (2.1) систем нийцтэй гэдгийг батлана. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$ гэдгээс A ба $\overline{A}$ хоёуланд нь нь суурь минор болох M минор олдоно. Суурь минорын тухай теорем 1.15-аар $\overline{A}$ матрицын сүүлчийн багана нь суурь багануудын шугаман эвлүүлэг болно. Энэ нь $\overline{A}$-н сүүлчийн багана A матрицын бүх багануудын шугаман эвлүүлэг байна гэсэн үг юм. Иймд

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \alpha_n$$

байх $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ систем олдоно. Энд орсон α_i $(i = \overline{1, n})$ бүгд нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш (M минорт орсон суурь багануудад харгалзах α_i-үүдийн дотор тэгээс ялгаатай α_i бий) Ингэж $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ гэсэн эрэмбэлэгдсэн систем нь (2.1)-ийн шийд болж байна. ▲

2.5. Шугаман тэгшитгэлийн дурын системийг бодох

Теорем 2.2. Хэрэв нийцтэй системийн матрицын ранг нь үл мэдэгдэхийн тоотой тэнцүү бол систем ганц шийдтэй.

Баталгаа. Систем (2.1) нийцтэй ба $\operatorname{rang} A = n$ гэе. Тэгвэл A ба $\overline{A}$ хоёуланд нь суурь минор болох M минор олдоно. $\overline{A}$ матрицын суурь биш мөр бүр суурь мөрүүдийн шугаман эвлүүлэг болно. Ингэхлээр (2.1)-ийн коэффициентүүд нь суурь минор M-ийг үүсгэх n тэгшитгэлийн системтэй адил чанартай (эквивалент). Сүүлчийн систем нь n үл мэдэгдэгчтэй n тэгшитгэлийн үл бөхөх систем байх учир систем ганц шийдтэй. ▲

ТЕОРЕМ 2.3. Нийцтэй системийн матрицын ранг нь үл мэдэгдэхийн тооноос бага байвал систем төгсгөлгүй олон шийдтэй.

Баталгаа. (2.1) систем нийцтэй ба $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r < n$ байг. M нь A ба $\overline{A}$ матрицын суурь минор гэе. Хялбарыг бодож суурь минор нь A матрицад зүүн дээд буланд нь байрладаг гэе. Хэрэв ийм байрлалтай биш бол мөр баганын байрыг солих хувиргалтаар зүүн дээд буланд нь авчирч болно.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

A матрицын суурь биш мөр болгоныг суурь мөрүүдээр илэрхийлж болох учраас (2.1) систем нь

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{aligned}$$

буюу

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

системтэй тэнцүү чанартай. $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$-үүдийн оронд дурын бодит тоо орлуулахад

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

гэсэн r үл мэдэгдэгчтэй r тэгшитгэлийн үл бөхөх систем үүснэ. Энэ системийн тодорхойлогч нь $\Delta = M \neq 0$ тул (2.9) систем нийцтэй. $(x_{r+1}, \ldots, x_n)$-үүдийн оронд дурын тоонуудын систем авах бүрд (2.9) систем нэг шийдтэй. Иймээс (2.1) систем төгсгөлгүй олон шийдтэй болж байна. ▲

ТЕОРЕМ 2.4. Хэрэв систем нь ганц шийдтэй бол системийн матрицын ранг нь үл мэдэгдэхийн тоотой тэнцүү байна.

ТЕОРЕМ 2.5. Хэрэв систем нь төгсгөлгүй олон шийдтэй бол системийн матрицын ранг нь үл мэдэгдэхийн тооноос бага байна.

Эдгээр теоремын баталгаа нь теорем 2.2, теорем 2.3-аас мөрдөн гарна.

Нийцтэй системийн матрицын ранг нь r бол коэффициент нь суурь минорыг үүсгэх r тооны үл мэдэгдэгчийг суурь үл мэдэгдэгч гэнэ. Бусад үл мэдэгдэгчүүдийг ($n-r$ тооны) чөлөөт үл мэдэгдэгч гэж нэрлэнэ.

Суурь минор ганц биш байж болох тул суурь үл мэдэгдэгчүүд нь нэг утгатай биш байна.

Теорем 2.3-ын баталгаагаар $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r < n$ байх тодорхой биш системийг бодох аргыг авч үзсэн. Үүнд бид (2.1) системийг ижил чанартай (2.8) системээр сольж чөлөөт үл мэдэгдэгч $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$-үүдэд дурын утга өгч эдгээрт харгалзах гишүүдийг олж байсан.

Авч үзэж байгаа (2.1) систем нь $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ шийдтэй бол (2.1)-тэй тэнцүү чанартай систем (2.8) нь

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1r}\alpha_r = b_1 - a_{1r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + \ldots + a_{2r}\alpha_r = b_2 - a_{2r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{2n}\alpha_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\alpha_1 + \ldots + a_{rr}\alpha_r = b_r - a_{r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{rn}\alpha_n \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

болно. Мөн (2.8) системд $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \ldots, x_n = \alpha_n$-ийг орлуулбал

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{2n}\alpha_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - a_{rn}\alpha_n \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

болно. (2.10), (2.11) системүүдийг жишиж үзвэл
$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ нь (2.11) системийн шийд болж байгаа нь харагдаж байна.

Дээр баталсан теоремуудаас шугаман тэгшитгэлийн системийг бодох арга мөрдөн гарч байна. Энэ нь:

1. Системийн болон, өргөтгөсөн матрицын ранг олно. Хэрэв $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \overline{A}$ бол систем шийдгүй гэж дүгнэнэ.

2. Хэрэв $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$ бол суурь минор, суурь үл мэдэгдэгчийг олно.

3. Өгсөн системийг түүнтэй тэнцүү чанартай суурь минорын элементүүдэд харгалзах r тэгшитгэлийн системээр солино.

4. Хэрэв суурь үл мэдэгдэхийн тоо нь системийн үл мэдэгдэхийн тоотой тэнцүү бол систем ганц шийдтэй.

5. Хэрэв суурь үл мэдэгдэхийн тоо нь системийн үл мэдэгдэхийн тооноос бага бол чөлөөт үл мэдэгдэхийг сул гишүүнд тооцож чөлөөт үл мэдэгдэгчдээр суурь үл мэдэгдэгчүүдийг илэрхийлэхэд Крамерын томъёо хэрэглэнэ. Чөлөөт үл мэдэгдэгчийн тодорхой утганд харгалзах шийдийг тухайн шийд гэнэ.

Жишээ 2.5. Дараах системийг бод.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_3 = 9 \end{aligned}\right\}$$

Бодолт.

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$ байгаа тул систем нийцтэй.

2. Суурь минорыг сонгоно. Суурь минороор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

гэж сонгоё. $M \neq 0$ ба $\operatorname{rang} A = 3$. Суурь үл мэдэгдэгч нь x_1, x_2, x_3 болно.

3. Өгсөн системийг түүнтэй тэнцүү чанартай

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{aligned}\right\}$$

системээр солино.

4. Суурь үл мэдэгдэгчийн тоо нь системийн үл мэдэгдэгчийн тоотой тэнцүү байна. Иймд систем ганц шийдтэй. Шийдийг Крамерын томъёог хэрэглэж олбол $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ болно. $(1; -2; 1)$ нь системийн I ба IV тэгшитгэлийг хангана.

Жишээ 2.6. Дараах системийг бод.

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ &2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ &5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11 \end{aligned}\right\}$$

Бодолт. Системийн ба өргөтгөсөн матрицуудын рангийг олъё.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$ тул систем нийцтэй.

2. Суурь минорыг

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

гэж сонгоё.

3. Өгсөн систем нь

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 &= 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4x_2 + 5x_3 &= 2 - 2x_1 + x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

системтэй тэнцүү чанартай болно. Суурь хувьсагч нь системийн хувьсагчийн тооноос цөөн тул систем төгсгөлгүй олон шийдтэй.

4. Крамерын томъёогоор (*) системийг бодвол

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 - x_1 - 4x_4 & -3 \\ 2 - 2x_1 + x_4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41 - 11x_1 - 17x_4}{22}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4 & 2 - 2x_1 + x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{24 - 18x_4}{22}$$

Ингэхлээр өгсөн системийн шийдүүдийн олонлог

$$\left\{ c_1, \quad \frac{41 - 11c_1 - 17c_2}{22}, \quad \frac{24 - 18c_2}{22}, \quad c_2 \;\middle|\; \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

болно.

2.6. Шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн систем. Шийдийн фундаменталь систем

Тодорхойлолт. *Шугаман тэгшитгэлүүдийн системийн сул гишүүд тэгтэй тэнцүү бол уул системийг шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн систем гэнэ.*

Нэг төрлийн систем нь

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

ийм хэлбэртэй байна.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots x_n = 0 \qquad (2.13)$$

нь (2.12) системийг хангана. Иймд нэг төрлийн систем үргэлж нийцтэй байна.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. $(0, 0, ..., 0)$ *(2.13) шийдийг (2.12) системийн тэг шийд буюу хялбар шийд гэнэ. Бусад шийдийг тривиаль биш шийд гэнэ.*

(2.12) систем ганц шийдтэй байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь системийн матрицын ранг үл мэдэгдэхийн тоотой тэнцүү байх явдал юм. Үүний баталгаа нь теорем 2.2, теорем 2.3, теорем 2.4-өөс шууд мөрдөн гарна.

Энэ нь $m = n$ үед (2.12) системийн тодорхойлогч тэгээс ялгаатай, ө.х. $\operatorname{rang} A = n$ бол систем ганцхан хялбар шийдтэй байна гэсэн үг юм.

Хэрэв (2.12) системийн матрицын ранг нь үл мэдэгдэхийн тооноос бага, ө.х. $\operatorname{rang} A < n$ бол (2.12) нь төгсгөлгүй олон шийдтэй (теорем 2.3-ыг үз).

Жишээ 2.7. Дараах системийг бод.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Бодолт. Тэгшитгэлийн тоо нь үл мэдэгдэхийн тооноос цөөн байна. Энэ тохиолдолд системийн матрицын ранг үл мэдэгдэхийн тооноос заавал бага байх тул систем төгсгөлгүй олон шийдтэй байна.

Системийн матриц

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

-ийн ранг нь 2-той тэнцүү байна. Суурь минороор

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

-ийг авбал өгсөн систем нь

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_3 = -2x_1 - x_4 \\ 2x_2 + x_3 = -4x_1 + 3x_4 \end{array}\right\}$$

системтэй тэнцүү чанартай болно. Сүүлийн системийг бодвол

$$x_2 = \frac{-6x_1 + 2x_4}{3}, \qquad x_3 = \frac{-5x_4}{-3} = \frac{5x_4}{3}$$

Өгсөн системийн шийдүүдийн олонлогийг бичвэл

$$\left\{(c_1, \quad \frac{-6c_1 + 2c_2}{3}, \quad \frac{5c_2}{3}, \quad c_2) \;\middle|\; \forall c_1, \quad c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

байна. (2.12) системийн

$$C_1 = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^{\mathrm{T}};\; C_2 = (x''_1, \ldots, x''_n)^{\mathrm{T}}\; \ldots\; C_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$$

гэсэн вектор бичлэгийг (2.12) системийн шийдийн вектор гэж нэрлэе.

$C_1, C_2, \ldots, C_k$ нь (2.12) системийн шийдийн векторууд бол

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_k C_k, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

илэрхийллийг $C_1, C_2, \ldots, C_k$ шийдүүдийн шугаман эвлүүлэг гэж нэрлэнэ. α_i-коэффициентүүд.

$C_1, C_2, \ldots, C_k$ шийдүүдийн векторуудын аль нэг нь бусдаараа шугаман илэрхийлэгдэж (шугаман эвлүүлэг) байвал $C_1, C_2, \ldots, C_k$ шийдийн векторуудыг шугаман хамааралтай, эсрэг тохиолдолд шугаман хамааралгүй гэж нэрлэнэ.

ТЕОРЕМ 2.6. (2.12) системийн төгсгөлөг тооны шийдүүдийн шугаман эвлүүлэг (2.12) системийн шийд болно.

Баталгаа. Энэ теоремын баталгааг $a = 2$ үед

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

систем дээр хийе. $C_1 = (x'_1, x'_2)$, $C_2 = (x''_1, x''_2)$ нь энэ системийн шийд байг. Тэгвэл

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = \alpha_1(x'_1, x'_2) + \alpha_2(x''_1, x''_2) = (\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x''_1, \alpha_1 x'_2 + \alpha_2 x''_2)$$

нь дээрх системийн шийд болно гэж харуулъя.

$\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x''_1, \alpha_1 x'_2,\quad \alpha_1 x'_2 + \alpha_2 x_2$-ийг $(*)$−д орлуулбал

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2) + \alpha_2(a_{11}x''_1 + a_{12}x''_2) = 0 \\ \alpha_1(a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2) + \alpha_2(a_{21}x''_1 + a_{22}x''_2) = 0 \end{aligned}\right.$$

Эндээс $(\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x''_1, \alpha_1 x'_2 + \alpha_2 x''_2)$ нь дээрх системийн шийд болох нь харагдаж байна. ▲

ТЕОРЕМ 2.7. n үл мэдэгдэгчтэй нэг төрлийн шугаман тэгшитгэлийн системийн матрицын ранг r нь үл мэдэгдэхийн тоо n-ээс бага $(r < n)$ бол $n - r$ тооны шугаман хамааралгүй вектор шийд $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ орших бөгөөд өгсөн системийн дурын вектор шийд нь $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ шийдүүдийн шугаман эвлүүлэг болно.

Баталгаа. (2.12) системд $\operatorname{rang} A = r < n$ байг. Энэ тохиолдолд систем нь $n - r$ тооны чөлөөт үл мэдэгдэгчтэй байна. Суурь үл мэдэгдэгчийг

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ гэе. Суурь үл мэдэгдэгчүүдийг чөлөөт үл мэдэгдэгчдээр илэрхийлбэл

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \ldots + d_{1n-r}x_n \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \ldots + d_{2n-r}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \ldots + d_{rn-r}x_n \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

систем үүснэ. $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$-ийн дурын утганд (2.15) системээс $x_1, x_2, \ldots, x_r$-г олж болно.

(2.12) системийн дурын вектор шийдийг

$$C = (x_1, x_2, \ldots, x_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r})^{\text{т}} \tag{2.16}$$

хэлбэртэй бичнэ. Энд $x_1, x_2, \ldots, x_r$ нь (2.15) системээс олох шийд $\alpha_1 = x_{r+1}$, $\alpha_2 = x_{r+2}$, …, $\alpha_{n-r} = x_n$ чөлөөт үл мэдэгдэхийн авах утга (тоонууд) юм. (2.15)-д $(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n-r})$ чөлөөт хувьсагчуудад $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, …, $(0, 0, 0 \ldots, 1)$ утгуудыг өгөхөд дараах вектор шийдүүд гарна.

$$C_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad C_{n-r} = \begin{bmatrix} d_{1n-r} \\ d_{2n-r} \\ \vdots \\ d_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Суурь минорын тухай теоремыг хэрэглэж эдгээр шийдүүдийг шугаман хамааралгүй гэж батална.

(2.15)-(2.16) тэнцлүүдээс (2.12) системийн дурын вектор шийд C нь $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$-ийн шугаман эвлүүлэг байна. Өөрөөр хэлбэл

$$C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_{n-r} C_{n-r} \tag{2.18}$$

байна. ▲

Энэ теоремын баталгаанаас $n-r$ нь шугаман хамааралгүй вектор шийдүүдийн максималь тоо гэж мөрдөн гарна. Мөн (2.12) систем тэгээс ялгаатай шийдтэй бол олон шийдтэй байна.

Тодорхойлолт. *Шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн системийн максималь тооны шугаман хамааралгүй шийдүүдийг шийдийн фундаменталь систем гэнэ.*

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *(2.12) системийн шийдүүдийн (2.17) хэлбэрийг шийдүүдийн нормчлогдсон фундаменталь систем гэнэ.*

(2.12) системийн $\operatorname{rang} A < n$ байхад энэ системийн дурын шийд нь шийдүүдийн фундаменталь системийн шугаман эвлүүлэг байдаг тул (2.18) нь (2.12) системийн ерөнхий шийд болно.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$-ийн тодорхой утганд харгалзан (2.18)-аас гарах шийдийг (2.12) системийн тухайн шийд гэнэ.

ЖИШЭЭ 2.8. Өмнөх жишээнд өгсөн системийн шийдүүдийн нормчлогдсон фундаменталь системийг ол.

Бодолт. Жишээ 2.4-д өгсөн системийн шийд нь

$$x_2 = \frac{-6x_1 + 2x_4}{3}, \qquad x_3 = \frac{5x_4}{3}$$

буюу шийдийн олонлог нь $\{(x_1, \frac{-6x_1+2x_4}{3}, \frac{5x_4}{3}, x_4) | \forall x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}$ болно. Чөлөөт үл мэдэгдэгч x_1, x_4-ийн оронд (1,0), (0,1) утгуудыг авахад харгалзан олдох вектор шийдүүд нь

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Энэ нь уг бодлогын шийдүүдийн нормчлогдсон фундаменталь систем болно. Иймээс дээрх бодлогын ерөнхий шийд нь $C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ байна. $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ утгад харгалзах тухайн шийд нь

$$C = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

болно.

$$AX = B \tag{2.19}$$

систем нийцтэй ба $\operatorname{rang} A = r < n$, n-үл мэдэгдэхийн тоо юм гэе.

Нэг төрлийн биш (2.19) системийн шийдүүд ба түүнд харгалзсан нэг төрлийн

$$AX = O \tag{2.20}$$

системийн шийдүүдийн холбоог тогтооё.

ТЕОРЕМ 2.8. Шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн биш системийн дурын шийд дээр түүнд харгалзах нэг төрлийн системийн дурын шийдийг нэмсэн нь нэг төрлийн биш системийн шийд болно.

Баталгаа. (2.20)-ийн вектор шийдийг C, (2.19) системийн вектор шийдийг H гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $AC = O, \quad AH = B$ болно. Эндээс

$$A(C + H) = AC + AH = O + B$$

болох ба $C + H$ нь (2.19) системийн вектор шийд болж байна. ▲

ТЕОРЕМ 2.9. Шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн биш системийн дурын хоёр шийдийн ялгавар нь тэр системд харгалзах нэг төрлийн системийн шийд болно.

Баталгаа. C_1, C_2 нь (2.19) системийн дурын хоёр вектор шийд гэе. Тэгвэл $AC_1 = B$ ба $AC_2 = B$ байна. Эндээс $A(C_1 - C_2) = AC_1 - AC_2 = B - B = O$ болно. Энэ нь $C_1 - C_2$ нь (2.20) системийн шийд болохыг зааж байна. ▲

Эдгээр теоремуудаас шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн биш системийн нэг шийдийг олж түүн дээрээ харгалзах нэг төрлийн системийн ерөнхий шийдийг нэмж уул нэг төрлийн биш системийн бүх шийдүүдийг олно гэж мөрдөн гарч байна.

2.7. Үл мэдэгдэхийг дараалан зайлуулах арга (Гауссын арга)

n үл мэдэгдэхтэй m тооны тэгшитгэлийн

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{2.21}$$

системийг авч үзье.

x_j-ийн коэффициентүүд дотор ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай байна. Системийн 1-р тэгшитгэлээс тэгээс ялгаатай коэффициенттэй x_j-г сонгон авч коэффициентийг нь a_{11} гэж тэмдэглээд хувьсагчидаа дахин дугаарлана. Ийнхүү сонгож авсан коэффициентоо үргэлж $a_{11} \neq 0$ гэж тэмдэглэнэ. Хэрэв $a_{i1} \neq 0$ $(i = \overline{2, m})$ бол i-р тэгшитгэлийг $-\frac{a_{11}}{a_{i1}}$-ээр үржүүлж дээр нь 1-р тэгшитгэлийг нэмнэ. Тэгэхэд (2.21) систем нь

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

системд шилжинэ. Энд дараах тохиолдолууд гарч болно.

1. Хэрэв (2.22) системд бүх коэффициент нь тэгтэй тэнцүү харин сул гишүүн нь тэгээс ялгаатай тэгшитгэл байвал систем шийдгүй.

2. Хэрэв (2.22) системд бүх a'_{ij} коэффициент ба сул гишүүн нь тэгтэй тэнцүү байвал (2.22) нь зөвхөн 1-р тэгшитгэлээс тогтоно. Энэ тохиолдолд $a_{11} \neq 0$ бусад бүх a_{ij} коэффициент нь тэгтэй тэнцүү бол систем ганц шийдтэй, эсрэг тохиолдолд (2.22) нь тодорхойгүй систем байна.

3. Хэрэв a'_{ij} коэффициентүүдийн дотор ядаж нэг коэффициент тэгээс ялгаатай бол (2.22) системийг бодох 2-р алхамдаа орно. $a'_{22} \neq 0$ юм гэе. (2.22) системийн 3-р тэгшитгэлээс хойших тэгшитгэлүүдийг $-\frac{a'_{22}}{a'_{i2}}$ $(i = \overline{3,n})$, $(a'_{i2} \neq 0)$ тоогоор үржүүлж 2-р тэгшитгэлийг нэмэхэд 3-р тэгшитгэлээс хойших бүх тэгшитгэл x_2-ийг агуулсан гишүүнгүй болно. Тухайлбал (2.22) систем нь

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a^{(2)}_{33}x_3 + \ldots + a^{(2)}_{3n}x_n = b^{(2)}_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(2)}_{m2}x_2 + \ldots + a^{(2)}_{mn}x_n = b^{(2)}_m \end{array}\right\}$$

системд шилжинэ.

Энэ үйлдлүүдийг үргэлжлүүлж хийвэл $p-1$ алхамын дараа

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b^1_2 \\ c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = b^2_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n = b^{(p-1)}_p \\ 0 = b^{(p-1)}_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b^{(p-1)}_m \end{array}\right\} \tag{2.23}$$

систем үүснэ.

(2.21) системээс (2.23) системд шилжүүлэх энэ аргыг Гауссын арга гэж нэрлэнэ. Дараах тохиолдолууд боломжтой.

1. $b^{(p-1)}_{p+1}, \ldots, b^{(p-1)}_m$-үүдийн ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай байвал (2.21) систем шийдгүй.

2. Бүх $b^{(p-1)}_j$ $(j = \overline{p+1,m})$ тэгтэй тэнцүү байвал (2.23) системийн сүүлчийн тэгшитгэлүүдийн баруун зүүн талууд бүгд тэгтэй тэнцэнэ. Эдгээр тэгшитгэлийг орхино.

(2.23) систем нь дараах хоёр хэлбэрийн аль нэг хэлбэрт байна. (2.23) нь

$p = n$ үед

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2' \\ c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n &= b_3^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ l_{n-1n-1}x_{n-1} + l_{n-1n}x_n &= b_{n-1}^{(n-2)} \\ d_{nn}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

гурвалжин хэлбэрт шилжсэн байна. (2.23) нь $p < n$ үед

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2^1 \\ c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n &= b_3^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n &= b_p^{(p-1)} \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

трапец хэлбэрт орсон байна. Энд $a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{pp}$ коэффициентүүд тэгээс ялгаатай (2.24) ба (2.25) системүүдээс $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$-ийг олохыг Гауссын аргын урвуу зам гэж нэрлэдэг.

(2.24) систем ганц шийдтэй. (2.24)-д $d_{nn} \neq 0$ тул сүүлчийн тэгшитгэлээс x_n-ийг олж өмнөх тэгшитгэлд орлуулж x_{n-1}-ийг олох гэх мэтээр дараалуулан $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$ шийдүүдийг олно.

(2.25) системд $d_{pp} \neq 0$ учир x_p-г $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$-ээр илэрхийлэх замаар Гауссын урвуу замыг хэрэгжүүлж $x_p, x_{p-1}, \ldots, x_1$-үүдийг $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$-ээр илэрхийлнэ. Энэ тохиолдолд (2.21) систем төгсгөлгүй олон шийдтэй.

Практикт Гауссын аргаар тэгшитгэлийн систем бодохдоо системийн өргөтгөсөн матрицын мөрүүд дээр эгэл хувиргалтуудыг хийж өргөтгөсөн матрицыг гурвалжин ба трапец хэлбэрт оруулна.

Жишээ 2.9. Дараах системийг Гауссын аргаар бод.

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Бодолт. Энэ системийн өргөтгөсөн матриц нь

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

байна.

$$\overline{A} \xrightarrow[S_4 - S_1]{\substack{S_2 - \frac{1}{4}S_1 \\ S_3 - \frac{1}{2}S_1}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 2 & -\frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_4 - \frac{2}{3}S_2]{S_3 + \frac{4}{3}S_2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{S_4 - S_3}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{эвтэйхэн хэлбэрт оруулбал} \xrightarrow{\substack{-\frac{4}{3}S_2 \\ -\frac{2}{5}S_3}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Энэ матрицад харгалзах тэгшитгэлийн систем нь

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_3 = -1 \end{aligned}\right\}$$

$x_3 = -1$. $2x_2 + 1 = 5 \Rightarrow x_2 = 2$. $4x_1 + 4 - 1 = 7 \Rightarrow x_1 = 1$ системийн шийд нь $(1, 2, -1)$.

2.8. Дасгал ба бодлогууд

Дараах системийг Крамерийн томъёогоор бод.

№1. а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 1 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 = 19 \end{cases}$

№2. а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$

№3. а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = -3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

№4. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$

Дараах системийг матрицан хэлбэрээр бичиж бод.

№5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h_1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = h_2 \\ x_2 + x_3 = h_3 \end{cases}$
а) $h_1 = -1, \quad h_2 = -2, \quad h_3 = -2$
б) $h_1 = 0, \quad h_2 = -2, \quad h_3 = -5$
в) $h_1 = 0, \quad h_2 = -2, \quad h_3 = 0$

№6. Төгсгөлгүй олон шийдтэй хоёр үл мэдэгдэхтэй хоёр тэгшитгэлийн систем бич.

№7. Хамгийн цөөн тооны үл мэдэгдэгчтэй, үл мэдэгдэгчийн тоо нь тэгшитгэлийн тооноос олон ба шийдгүй байх системийг бич.

№8. b-ийн ямар утганд систем нийцтэй байх вэ?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x + 4y + z = b \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

№9. b_1, b_2, b_3 параметрийн ямар утганд дараах систем хоёр тэгшитгэлээс тогтсон системтэй ижил чанартай байх вэ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Дараах системүүдийн нийцтэй эсэхийг шинжилж шийдийг ол.

№10. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ **№11.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$

№12. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 = 23 \end{cases}$ **№13.** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$

№14. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-3 \\ x_1+2x_2+4x_3=9 \\ 2x_1+7x_2-x_3=0 \\ 3x_1+8x_2-x_3=1 \end{cases}$ **№15.** $\begin{cases} 5x_1+8x_2+3x_3=11 \\ x_1+3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$

№16. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=2 \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=-1 \\ 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-4 \\ 7x_1-4x_2-7x_3-5x_4=-7 \end{cases}$ **№17.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+9=0 \\ 8x_1+3x_2+5x_3+13=0 \\ 2x_1+5x_2-x_3+5=0 \end{cases}$

№18. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4-2=0 \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4-5=0 \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4-3=0 \end{cases}$

Дараах системүүдийн шийдүүдийн нормчлогдсон фундаменталь системийг ол.

№19. а) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+5x_3+4x_4=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0 \end{cases}$

№20. а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=0 \\ 6x_1-4x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0 \end{cases}$

№21. а) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+x_2-4x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2-5x_3-x_4=0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$

№22. а) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3-2x_4=0 \\ 5x_1-3x_2-3x_3=0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-4x_2+7x_3+5x_4=0 \\ 4x_1-9x_2+8x_3+5x_4=0 \\ -3x_1+2x_2-5x_3+3x_4=0 \end{cases}$

№23. Дараах системийн ерөнхий шийдийг уул системийн тухайн шийд ба түүнд харгалзах нэг төрлийн системийн нийлбэрээр илэрхийл.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

№24. Гурван үл мэдэгдэхтэй шийд нь $(1,1,2)$ ба $(1,2,3)$ вектор шийдийн шугаман эвлүүлэг байх системийг бич.

№25. Хэрэв A нь n эрэмбийн үл бөхөх матриц $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ бол $(AB)X =$

O, $BX = O$ системүүд тэнцүү чанартай байхыг батал.

Дараах системүүдийг Гауссын аргаар бод.

№26. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28 \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases}$ **№27.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

№28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ **№29.** $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

№30. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 22 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5 \\ 7x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -8 \end{cases}$

№31. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

№32. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ **№33.** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

№34. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 21 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 = 12 \\ 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 = 29 \\ 15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 130 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -13 \end{cases}$

№35. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 9 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 + 146 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 + 10 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 + 26 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 37 = 0 \end{cases}$

Дараах бодлогуудад харгалзах нэг төрлийн тэгшитгэлийн шийд ба өгсөн тухайн шийдээр тэгшитгэлийн бүх шийдийг бич.

№36. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 6 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 7 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 7 = 0 \end{cases}$ $(1; 2; 1; 4)$

№37. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 6 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_3 + 5x_4 - 16 = 0 \end{cases}$ $(-1; -1; 3; 2)$

№38. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 13 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 14 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10 = 0 \end{cases}$ $\quad (13; 21; 2; -3)$

Хариу

1. a) $\{(1,-1)\}$ **2. a)** $\{(1,1,1)\}$ **3. a)** $\{(1,0,-1,2)\}$ **4. a)** $\{(4,5,-3)\}$ **5. a)** $\{(-1,-1,-1)\}$, **б)** $\{(-1,-2,-3)\}$, **в)** $\{(-\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{4}{7})\}$ **6.** $\begin{cases} ax+by=c \\ kax+kby=kc \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ kax+kby+kcz=d \end{cases}$ **8.** $b=7$ **9.** $b_3 = 2b_1 + 3b_2$ **10.** $\{(c, -\frac{7}{5}, \frac{18-15c}{10}) \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$ **11.** $\{(-3c_1 + 6c_2 + 4, 2c_1 - 4c_2 - 3, c_1, c_2) \mid \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ **12.** $\{(4;1)\}$ **13.** Нийцгүй **14.** $\{(1,0,2)\}$ **15.** $\{(c-1, 2-c, c) \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$ **16.** $\{(5c-5; 7c-7; c; 0) \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$ **18.** Нийцгүй **19. a)** $\{(-1,4,1,0);\ (-\frac{5}{2},\frac{3}{2},0,1)\}$ **20. a)** $\{(1,0,0,0,3);\ (0,1,0,0,-2);\ (0,0,1,1,0)\}$ **21. a)** $\{(1,2,1,0),(-1,1,0,1)\}$ **22. a)** $\{(0,-1,1,0),\ (-3,-5,0,1)\}$ **23.** $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **24.** $x+y-z=0$ **26.** $\{(2,3,4)\}$ **27.** $\{(\frac{1}{7}(-6+8c), \frac{1}{7}(1-13c), \frac{1}{7}(15-6c), c) \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$ **28.** $\{(1,3,5)\}$ **29.** $\{\frac{1}{11}(c_1-9c_2-2), \frac{1}{11}(-5c_1+c_2+10), c_1, c_2 \mid \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ **30.** $\{(1,-1,1,-1)\}$ **31.** $\{x_1, \frac{13-2x_5}{10}, -\frac{1}{2} - 4x_5, \frac{1-14x_5}{10}, x_5 \mid x_1, x_5 \in \mathbb{R}\}$ **32.** $\{10-30x_2, x_2, 15-48x_2, 4-13x_2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ **33.** $\{11x_4, 16x_4, 0, x_4 \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$ **34.** $\{2, -\frac{3}{2}, 4, 3, \frac{5}{2}\}$ **35.** $\{5,4,-3,3,-2\}$ **36.** $\{1 + \frac{23x_4}{37}; 2 - \frac{24x_4}{37}; 1 + \frac{4x_4}{37}; x_4 + 4 \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$ **37.** $\{11x_4 - 1; 16x_4 - 1; 3; x_4 + 2 \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$ **38.** $\{13 - \frac{3x_4}{2}; 21 - \frac{x_4}{2}; 2 - \frac{x_4}{2}; x_4 - 3 \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$

III бүлэг. Вектор

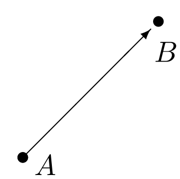
3.1. Чиглэлтэй хэрчим ба вектор

Огторгуйг хоёр хагас огторгуйд хувааж байгаа дурын α гэсэн хавтгай авч үзье. α хавтгайг огтлогч шулуун бүр олтлолын цэгээр өөр хагас огторгуйд орших хоёр цацрагт хуваагдана.

Тодорхойлолт. *Нэг хагас огторгуйд орших ба параллель шулуунууд дээр хэвтэх хоёр цацрагийг ижил чиглэлтэй гэнэ. Параллель шулуунууд дээр хэвтэх боловч хоёр өөр хагас огторгуйд байгаа хоёр цацрагийг эсрэг чиглэлтэй гэнэ.*

Нэг цацрагтай ижил чиглэлтэй байх цацрагуудын олонлогийг огторгуй дахь чиглэл гэнэ. Цацрагуудын ижил, эсрэг чиглэлийг харгалзан $\uparrow\uparrow$, $\downarrow\uparrow$ гэж тэмдэглэнэ. Жишээлбэл: $[AB)$, $[CD)$ цацрагууд ижил чиглэлтэй гэвэл $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$, $[AB)$, $[CD)$ цацрагууд эсрэг чиглэлтэй гэвэл $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$ гэж тэмдэглэнэ.

Шулууны хэрчмийн нэг төгсгөлийн цэгийг нь эхлэл, нөгөө төгсгөлийн цэгийг нь төгсгөл гэнэ. Чиглэлтэй хэрчмийн эхлэлийн цэг A, төгсгөлийн цэг нь B бол чиглэлтэй хэрчмийг AB гэж тэмдэглэнэ. Эрэмбэлэгдсэн хоёр цэг өгснөөр чиглэлтэй хэрчим тодорхойлогдоно.



Зураг 1

Чиглэлтэй хэрчим AB-ийн уртыг AB хэрчмийн урт гэнэ. Чиглэлтэй хэрчмийг зурахдаа хэрчмийн төгсгөлд нь сум зурна (зураг 1). Хэрэв $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$ байвал AB, CD хэрчмүүдийг ижил чиглэлтэй гэж нэрлээд $AB \uparrow\uparrow CD$, $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$ бол $AB \uparrow\downarrow CD$ гэж тус тус тэмдэглэнэ.

Огторгуйн A цэг бүрийг эхлэл төгсгөл нь давхцсан чиглэлтэй хэрчим мэт үзэж болно. Энэ хэрчмийг AA гэж тэмдэглэх ба энэ хэрчмийг тэг хэрчим гэнэ. Тэг хэрчмийн чиглэл тодорхойгүй урт тэгтэй тэнцүү. Тэг хэрчмийг O гэж тэмдэглэнэ.

Тодорхойлолт. *Чиглэлтэй хоёр хэрчим AB, CD-үүд нь ижил чиглэлтэй, тэнцүү урттай байвал AB, CD хэрчмүүдийг тэнцүү гэнэ.* AB, CD чиглэлтэй хэрчмүүдийн тэнцүү чанартайг $AB \sim CD$ гэж тэмдэглэнэ. Энэ тэнцүү гэсэн харьцаа нь дараах гурван чанарыг хангана.

Чанар 1. AB нь өөрөө өөртэйгөө тэнцүү (рефлексив чанар гэнэ).

Чанар 2. $AB \uparrow\uparrow CD,\ AB = CD \Rightarrow CD \uparrow\uparrow AB,\ CD = AB$. Өөрөөр хэлбэл AB нь CD-тэй тэнцүү бол CD нь AB-тэй тэнцүү байна (тэгш хэмтэй чанар гэнэ).

Чанар 3. AB нь CD-тэй тэнцүү, CD нь EF-тэй тэнцүү бол AB нь EF-тэй тэнцүү (дамжих-транзатив чанар гэнэ).

Дээрх 3-н чанарыг агуулсан харьцааг эквивалентын харьцаа гэнэ. Иймд чиглэлтэй хэрчмүүдийн тэнцүү чанар эквивалентын харьцаа болж байна.

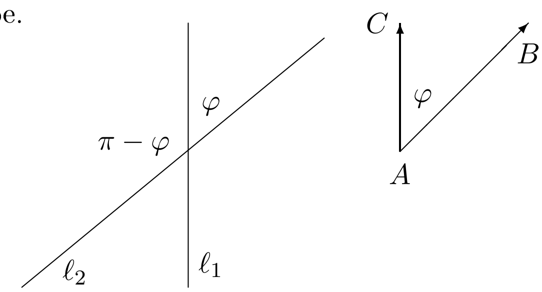
Ямар нэгэн олонлог дээр тодорхойлогдсон эквивалентын харьцаа нь уг олонлогийг үл огтлолцох ангиудад хуваадаг. Нэг ангид нь хоорондоо эквивалентын харьцаанд орших бүх элементүүд ордог. Тэгвэл бүх чиглэлтэй хэрчмүүдийн олонлогт тодорхойлогдсон "тэнцүү" чанар чиглэлтэй хэрчмүүдийн олонлогийг үл огтлолцох ангид хуваана. Эквивалентын нэг ангид хоорондоо тэнцүү бүх хэрчмүүд орно. Ийм хуваалтын нэг ангийг фактор олонлог гэж нэрлэгдэх шинэ олонлогийн нэг элемент гэж үздэг. Ийнхүү огторгуйн бүх чиглэлтэй хэрчмүүдийн олонлогийг "тэнцүү" чанараар фактор олонлогт хувааж, фактор олонлогийн нэг элемент нь "тэнцүү" чанартай чиглэлтэй хэрчмүүдийн олонлог байна гэж үзэх боллоо. Энэ фактор олонлогийн элементүүдийг (ангиудыг) вектор (чөлөөт вектор) гэж нэрлэнэ.

Дунд сургуульд нэг вектор өгөхөд түүгээр нэг параллель зөөлт тодорхойлдог тухай судалдаг. Ингэхлээр векторын энэ тодорхойлолт параллель зөөлтийн тодорхойлолтой тэнцүү (эквивалент) чанартай байна.

Вектор нь эквивалентын нэг анги. Энэ ангид орсон чиглэлтэй хэрчмүүд ижил чиглэлтэй тул тэр чиглэлийг энэ ангиар тодорхойлогдож байгаа векторын чиглэл, энэ ангид орсон чиглэлтэй хэрчмүүдийн урт ижилхэн. Энэ уртыг энэ ангиар тодорхойлогдох векторын модуль (урт) гэнэ. Чиглэлтэй хэрчмийн нэг ангид орсон чиглэлтэй хэрчим бүрийг энэ ангиар тодорхойлогдох векторын төлөөлөгч гэж нэрлэнэ. Векторыг тодорхойлогч ангийн нэг төлөөлөгч (чиглэлтэй хэрчим) өгснөөр вектор өгөгдлөө гэж үзнэ. Ингэхлээр чиглэлтэй хэрчмийг вектор гэж үзнэ. Векторыг $\overrightarrow{AB}$ эсвэл $\mathbf{a}$ гэж тэмдэглэнэ.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хэрэв* $\mathbf{a} \subset \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \subset \mathbf{a}$ *өөрөөр хэлбэл* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *олонлогууд давхцаж байвал* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *векторуудыг тэнцүү векторууд гэнэ.* $AB \sim CD$ бол $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ байх нь илэрхий.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Векторын дурын төлөөлөгчийн уртыг векторын урт* гэж нэрлээд $|\mathbf{a}|$ гэж тэмдэглэнэ. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудыг авч үзье. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ нь $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын төлөөлөгчид гэе.



Зураг 2

Хэрэв өнцгийг онцгойлж заагаагүй бол π-ээс хэтрэхгүй, 2-р зурагт заагдсан φ өнцгийг $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын хоорондох өнцөг гэж ойлгоод, $(\mathbf{a} \overset{\wedge}{,} \mathbf{b})$ гэж тэмдэглэе.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хоорондох өнцөг нь $\frac{\pi}{2}$-тай тэнцүү байх хоёр* *векторыг ортогональ векторууд гэнэ.*

Хоёр векторын төлөөлөгчид нь ижил чиглэлтэй бол тэдгээр векторуудыг ижил чиглэлтэй, төлөөлөгчид нь эсрэг чиглэлтэй бол тэдгээрийг эсрэг чиглэлтэй векторууд гэнэ.

Хэрэв хоёр вектор нь ижил буюу эсрэг чиглэлтэй өөрөөр хэлбэл нэг шулуунтай параллель бол тэдгээрийг коллинеар векторууд гэнэ.

Тэг векторыг дурын вектортой ортогональ, бас коллинеар гэж үзнэ. Коллинеар векторуудыг $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$, параллель векторуудыг $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ гэж тэмдэглэе.

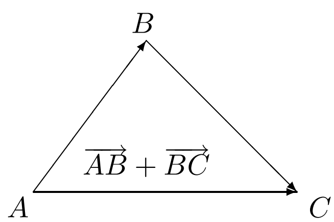
Тодорхойлолт. *Хэрэв гурван векторын төлөөлөгчид нь нэг хавтгай дээр буюу параллель хавтгайнууд дээр хэвтэж байвал тэдгээрийг компланар векторууд гэж нэрлэнэ.*

Хэрэв гурван векторын аль нэг нь тэг вектор байвал тэдгээр векторууд компланар байна гэж үзнэ.

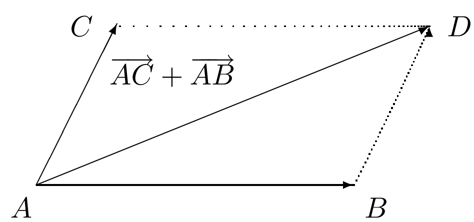
3.2. Вектор дээр хийх шугаман үйлдлүүд

Шугаман үйлдэл гэдэг дор векторуудын нэмэх, тоогоор үржүүлэх үйлдлийг ойлгоно.

Векторуудын төлөөлөгч $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ векторуудыг авч үзье. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын нийлбэр $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ векторыг зурагт үзүүлэв (зураг 3).



Зураг 3



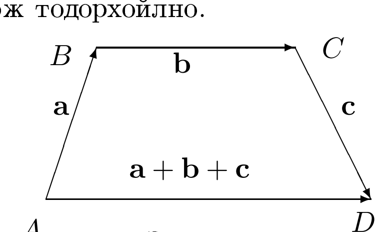
Зураг 4

Зургаас харахад $\overrightarrow{AC}$ вектор нь $\overrightarrow{AB}$ векторын эхлэл дээр эхтэй $\overrightarrow{BC}$-ийн төгсгөл дээр төгсгөлтэй байна.

Хэрэв $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторууд коллинеар биш бол параллелограммын дүрэм гэж нэрлэгдэх 4-р зурагт үзүүлснээр нийлбэр векторыг тодорхойлно. Тухайлбал тэдгээр коллинеар биш векторуудаар талаа хийсэн параллелограммын диагональ $\overrightarrow{AD}$ нь тэдгээрийн нийлбэр гэж тодорхойлно.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ гурван векторын нийлбэр гэж эдгээр векторуудыг дараалан нэмэхийг ойлгоно. Өөрөөр хэлбэл

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \equiv (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$



Зураг 5

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$ гэвэл $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} =$

$\overrightarrow{AD}$. Үүнтэй адилаар n векторуудын нийлбэрийг тодорхойлно. Векторуудын нэмэх үйлдэл дараах чанартай. Үүнд:
Чанар 1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын хувьд $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ нэг утгатай тодорхойлогдоно.
Чанар 2. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (коммутатив чанар)
Чанар 3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (ассоциатив чанар)
Чанар 4. $\forall \mathbf{a}$ векторын хувьд $0+\mathbf{a}=\mathbf{a}+0=\mathbf{a}$.

$\mathbf{a}$ дурын вектор, α дурын тоо гэе. $\mathbf{a}$ векторыг α тоогоор үржүүлэхэд
а) $|\alpha\mathbf{a}|=|\alpha||\mathbf{a}|$ модультай.
б) Хэрэв $\alpha>0$ бол $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\alpha\mathbf{a}$, хэрэв $\alpha<0$ бол $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\alpha\mathbf{a}$ чиглэлтэй $\alpha\mathbf{a}$ вектор гарна.
Хэрэв $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ бол $\alpha\mathbf{a}=\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$
Хэрэв $\alpha=0$ бол $\alpha\mathbf{a}=0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$ байна.

Векторыг тоогоор үржүүлэх үйлдэл нь дараах чанартай. Үүнд:
Чанар 1. $\forall\mathbf{a}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ хувьд $\alpha\mathbf{a}$ нэг утгатай олдоно.
Чанар 2. $\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}\quad(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.
Чанар 3. $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$.
Чанар 4. $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

Тодорхойлолт. $\mathbf{a}$ *векторыг* (-1)*-ээр үржүүлэхэд гарах* $-\mathbf{a}$ *векторыг* $\mathbf{a}$ *векторын эсрэг вектор гэнэ.*

Хэрэв $\mathbf{a_0}$ *векторын урт нь* $(|\mathbf{a_0}|=1)$ *нэгтэй тэнцүү байвал* $\mathbf{a_0}$ *векторыг нормчлогдсон буюу нэгж вектор гэнэ.*

Хэрэв $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ *бол* $\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ *вектор нь* $\mathbf{a}$*-тай коллинеар нэгж вектор байна (өөрөөр хэлбэл* $\mathbf{a}$*-ийн дагуу чиглэсэн нэгж вектор байна).*

Хэрэв $\mathbf{a_0}$ нь $\mathbf{a}$ вектортэй коллинеар нэгж вектор бол $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a_0}$ байна.

Тэг вектор нь дурын вектортэй коллинеар тул хойшид коллинеар векторын тухай ярихдаа авч үзэж байгаа векторуудыг тэг вектороос ялгаатай гэж үзнэ.

Теорем 3.1. $\mathbf{a},\mathbf{b}$ векторууд коллинеар байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}\ \ (\alpha\neq0)$ байх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ гэж баталъя.
а) $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$ бол $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$-ийн дагуу чиглэсэн нэгж вектор $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\Rightarrow$

$$\mathbf{b}=\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \tag{3.1}$$

байна. $\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}=\alpha$ гэж тэмдэглэвэл $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ болно.

б) $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$ бол $\mathbf{b}=-\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ байна. $-\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}=\alpha$ гэвэл $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ болно.

$\Leftarrow$: $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ $(\alpha\neq0)$ бол $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ байхыг баталъя. $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$ бол векторыг тоогоор үржүүлэх тухай тодорхойлолтоос $\mathbf{a},\mathbf{b}$ векторууд коллинеар болох нь шууд харагдана. ▲

$\mathbf{a}$ вектор дээр $\mathbf{b}$-ийн эсрэг векторыг нэмэхийг $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын ялгавар гэж нэрлээд $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ гэж тэмдэглэнэ.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

3.3. Векторыг сууриар задлах

ТОДОРХОЙЛОЛТ. $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \ldots, \mathbf{a_n}$ *векторууд авч үзье.* $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ *векторууд ба* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *тоонуудын хувьд*

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n \mathbf{a_n}$$

векторыг $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ *векторын шугаман эвлүүлэг гэнэ.* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *тоонуудыг шугаман эвлүүлэгийн коэффициент гэнэ.*

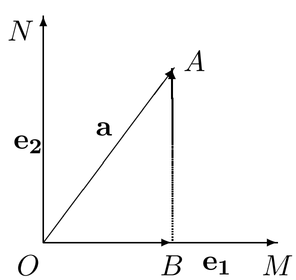
Хэрэв $\mathbf{a}$ вектор нь $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ векторуудын шугаман эвлүүлэг $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n \mathbf{a_n}$ хэлбэртэй тавигдаж байвал $\mathbf{a}$ векторыг $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ векторуудаар задаллаа гэж ярина.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хавтгай дээр сонгож авсан коллинеар биш хоёр векторыг хавтгайн суурийн векторууд гэж нэрлэнэ. Тодорхой эрэмбээр сонгож авсан компланар биш гурван векторыг огторгуйн суурийн векторууд гэж нэрлэнэ.*

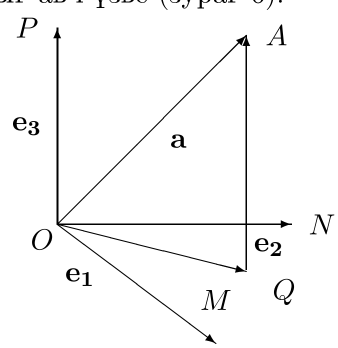
Хавтгайн дурын $\mathbf{a}$ векторыг суурийн векторуудаар нэг утгатай задалж болохыг баталъя. Хавтгайн суурь векторыг $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ гэж тэмдэглэе. Дараах хоёр тохиолдол байна. Үүнд:

1. $\mathbf{a}$ вектор нь суурийн аль нэг вектортай коллинеар тухайлбал $\mathbf{e_1}$-тэй коллинеар бол $\mathbf{a}$ вектор нь $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e_1}$ гэж нэг утгатай илэрхийлэгдэнэ. Тэгвэл $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2}$ болох ба энэ бичлэг нэг утгатай. Ингэж $\mathbf{a}$ векторыг суурийн вектороор задална.

2. $\mathbf{a}$ вектор нь суурийн ямар ч вектортой коллинеар биш байвал $\mathbf{e_1} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{e_2} = \overrightarrow{ON}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ гэсэн гурван векторыг авч үзье (зураг 6).



Зураг 6



Зураг 7

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$ байх ба $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BA}$ нь харгалзан $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ вектортай коллинеар (өөрөөр хэлбэл $\overrightarrow{OB} = \alpha_1\mathbf{e_1}, \overrightarrow{BA} = \alpha_2\mathbf{e_2}$). Нөгөө талаас векторуудын нийлбэр нэг утгатай гэдгээс $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$ илэрхийлэл нэг утгатай байна. Иймд

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} \tag{3.2}$$

байна. Энэ задаргааны (α_1, α_2) коэффициентүүдийг $\mathbf{a}$ векторын $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурь дахь координат гэж нэрлэнэ.

Энэ бүхнээс үзэхэд өгсөн $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурийн үед хавтгайн дурын вектор бүрд эрэмбэлэгдсэн хос тоо (α_1, α_2) олдоно. Үүний урвуу нь мөн хүчинтэй. Энэ нь эрэмбэлэгдсэн хос тоо бүрт тэдгээрээр координат хийх вектор олдоно гэсэн үг.

Огторгуйд $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ суурийн векторууд өгсөн гэе. Огторгуйн дурын вектор $\mathbf{a}$-г энэ суурийн векторуудаар нэг утгатай задалж болохыг баталъя.

1. $\mathbf{a}$ ба $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ векторууд компланар юм гэе. Тэгвэл $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2}$ гэж задарна. Энэ задаргаа нэг утгатай. Иймд $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + 0\mathbf{e_3}$ гэж бичиж болно.

2. $\mathbf{a}$ нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ суурийн аль ч хоёр вектортой нь компланар биш юм гэе (зураг 7). $\mathbf{e_1} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{e_2} = \overrightarrow{ON}$, $\mathbf{e_3} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ векторуудыг дүрсэлье. Тэгвэл

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA}$$

гэсэн бичлэг нэг утгатай байна. Вектор $\overrightarrow{QA}$ нь $\mathbf{e_3}$-тай коллинеар, $\overrightarrow{OQ}$ нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$-тай компланар байна. Иймд $\overrightarrow{QA} = \alpha_3\mathbf{e_3}$, $\overrightarrow{OQ} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2}$ байна. Эндээс $\mathbf{a}$ вектор нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ сууриар

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \alpha_3\mathbf{e_3}$$

гэж нэг утгатай задарна. Энэ задаргааны $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ коэффициентүүдийг $\mathbf{a}$ векторын $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ суурь дахь координат гэнэ.

Эндээс үзвэл огторгуйн дурын вектор бүрт тодорхой эрэмбээр авсан $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ гуравт зөвхөн ганц харгалзаж байна (тухайн суурийн үед). Үүний урвуу тодорхой эрэмбээр сонгосон $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ гэсэн гуравт бүрд огторгуйн зөвхөн ганц вектор харгалзана.

Хэрэв $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ бол $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0$ байна. $\mathbf{0}$ векторын бүх координат тэгтэй тэнцүү байна.

Тодорхойлолт. *Хэрэв суурийн векторууд нь хос хосоороо ортогональ ба суурийн вектор бүр нэгж вектор* $(|\mathbf{e_1}| = |\mathbf{e_2}| = |\mathbf{e_3}| = 1)$ *бол* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$-*ийг ортонормчлогдсон суурь гэнэ.*

3.4. Координатаар өгсөн векторууд дээр хийх шугаман үйлдлүүд

$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ суурь өгчээ гэе. Энэ суурьт $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторууд

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \alpha_3\mathbf{e_3}, \qquad \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \beta_3\mathbf{e_3}$$

задаргаатай гэе. Тэгвэл

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \alpha_3\mathbf{e_3}) \pm (\beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \beta_3\mathbf{e_3}) \overset{3.2}{=}$$

$$= (\alpha_1 \pm \beta_1)\mathbf{e_1} + (\alpha_2 \pm \beta_2)\mathbf{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{e_3} \tag{3.4}$$

болно. Эндээс үзвэл $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын нийлбэр (ялгавар) векторын координат нь нэмэгдэхүүн векторуудын харгалзах координатуудын нийлбэртэй (ялгавартай) тэнцүү байна.

$\mathbf{a}$ векторыг λ тоогоор үржүүлэхэд гарах $\lambda\mathbf{a}$ векторын хувьд

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \alpha_3\mathbf{e_3}) = (\lambda\alpha_1)\mathbf{e_1} + (\lambda\alpha_2)\mathbf{e_2} + (\lambda\alpha_3)\mathbf{e_3} \tag{3.5}$$

болох ба координат нь $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$ болно.

$\mathbf{a} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ векторууд коллинеар бол $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ байх ба

$$\beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \beta_3\mathbf{e_3} = (\lambda\alpha_1)\mathbf{e_1} + (\lambda\alpha_2)\mathbf{e_2} + (\lambda\alpha_3)\mathbf{e_3} \tag{3.5}$$

байна. Векторуудын тэнцлийн тодорхойлолтоор

$$\beta_1 = \lambda\alpha_1, \quad \beta_2 = \lambda\alpha_2, \quad \beta_3 = \lambda\alpha_3$$

буюу

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} \tag{3.6}$$

болно. Энэ бичлэгээс харахад $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$ байхаар харагдана. Гэвч эдгээр $\beta_1, \beta_2, \beta_3$-ийн зарим нь тэгтэй тэнцүү үед ч (3.6)-г бичнэ. (3.6) нөхцөл нь векторуудын коллинеар байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл болно.

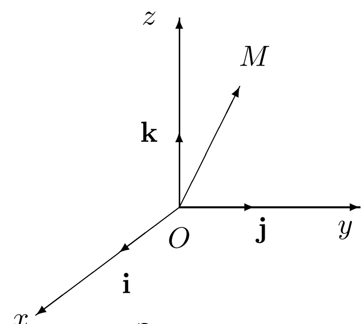
3.5. Тэгш өнцөгт Декартын координатын систем

Огторгуйд O цэг ортнормчлогдсон $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ суурь өгсөн байг.

Тодорхойлолт. *O цэг ортнормчлогдсон $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ суурийг тэгш өнцөгт декартын координатын систем гэнэ. O цэгийг координатын эх O цэгийг дайрсан $\mathbf{e_1}$ вектортай ижил чиглэлтэй тэнхлэгийг абсцисс буюу OX*

тэнхлэг, O цэгийг дайрсан $\mathbf{e_2}$ вектортай ижил чиглэлтэй тэнхлэгийг ординат буюу OY тэнхлэг, O цэгийг дайрсан $\mathbf{e_3}$ вектортай ижил чиглэлтэй тэнхлэгийг аппликат буюу OZ тэнхлэг гэж нэрлэнэ. OX, OY, OZ тэнхлэгүүдийг координатын тэнхлэгүүд гэнэ. Координатын хоёр тэнхлэгийг дайрсан (агуулсан) хавтгайг координатын хавтгай гэнэ.

Координатын хавтгайнуудыг XOY, XOZ, YOZ гэж тэмдэглээ. Тэгш өнцөгт Декартын координатын системийг $(0, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ буюу $OXYZ$ гэж тэмдэглээ. Тэгш өнцөгт декартын координатын системийн суурийн векторуудыг ихэвчлэн $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ гэж тэмдэглэдэг. Огторгуйн дурын M цэгийг координатын эх O цэгтэй холбож $\overrightarrow{OM}$ вектор байгуулая (зураг 8).



Зураг 8

Тодорхойлолт. $\overrightarrow{OM} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ *векторыг M цэгийн радиус вектор гэнэ. $\overrightarrow{OM}$ векторын координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$-ыг M цэгийн $(\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{r})$ систем дэх координат гэнэ. $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ гэж тэмдэглэнэ.*

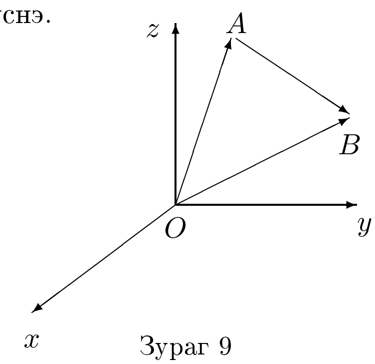
Ингэж огторгуйн дурын M цэг бүрд координат гэж нэрлэгдэх эрэмбэлэгдсэн $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ гэсэн 3 тоо, эрэмбэлэгдсэн гурван тоо $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ бүрд огторгуйн нэг цэг харгалзаж (3.3-т судалснаар) байна.

Тодорхой эрэмбээр авсан компланар биш $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AD}$ гурван вектор авч үзье.

Тодорхойлолт. *Хэрэв $\overrightarrow{AD}$ векторын төгсгөлөөс харахад $\overrightarrow{AB}$-ээс $\overrightarrow{AC}$ вектор рүү очих (эргүүлсэн) богино зам (эргүүлэлт) цагийн зүүний эсрэг байвал эдгээр векторуудыг баруун гуравт буюу баруун чиглэлтэй (ориентацитай) байна гэх ба эсрэг тохиолдолд зүүн гуравт буюу зүүн чиглэлтэй (ориентацитай) гэнэ.*

Хэрэв $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ векторууд баруун (зүүн) гуравт үүсгэж байгаа бол тэдгээрийн хоёр векторын байрыг солиход зүүн (баруун) гуравт болно. Харин $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$; $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ гэж солиход ижил гуравтууд үүснэ.

Тодорхойлолт. *Хэрэв координатын системийн суурь векторууд нь баруун (зүүн) гуравт үүсгэж байвал координатын системийг баруун (зүүн) систем гэж нэрлэнэ.*



Зураг 9

Огторгуйн тэгш өнцөгт декартын координатын системийн адилаар хавтгай дээрх тэгш өнцөгт декартын системийг тодорхойлно. $OXYZ$ системд $A(x_1, y_1, z_1)$,

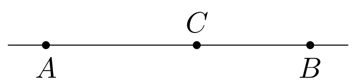
$B(x_2, y_2, z_2)$ цэгүүд өгчээ. $\overrightarrow{AB}$ векторын координатыг олъё (зураг 9).
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ байна. $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ векторуудын координат нь B, A цэгийн координат байх тул

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = \\ = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

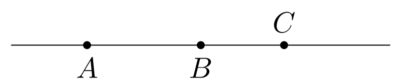
Эндээс $\overrightarrow{AB}$ векторын координат нь $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ байна. Өөрөөр хэлбэл $\overrightarrow{AB}$ векторын төгсгөлийн B цэгийн координатуудаас эхний A цэгийн харгалзах координатуудыг хассан ялгавар нь $\overrightarrow{AB}$ векторын координат байна.

3.6. Өгсөн харьцаагаар хэрчмийг хуваах

AB хэрчмийг λ $(\lambda \neq -1)$ харьцаагаар хуваах C цэгийг олно гэдэг нь A, B цэгүүдийг дайрсан шулуун дээр $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ байх C цэгийг олно гэсэн үг.



Зураг 10



Зураг 11

Хэрэв $\lambda > 0$ бол C цэг нь AB хэрчмийн дотор (зураг 10), $\lambda < 0$ бол C цэг нь AB хэрчмийн гадна (зураг 11) орших нь илэрхий байна.

$OXYZ$ системд $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ төгсгөлтэй AB хэрчмийг λ харьцаагаар хуваах $C(x_0, y_0, z_0)$ цэгийг олъё.

$$\overrightarrow{AC} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1), \qquad \overrightarrow{CB} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$$

байна. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ гэдгээс

$$x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0), \quad y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0), \quad z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0)$$

болно. Эндээс

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

байна. Хэрэв $\lambda = 1$ бол C цэг нь AB хэрчмийн дундаж цэг байна. Энэ тохиолдолд C цэг нь

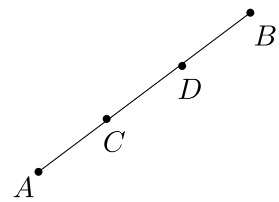
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

координаттай байна.

Жишээ 3.1. $A(-1; 2; 3)$, $B(0; 3; 5)$ цэгүүд өгчээ. AB хэрчмийг гурван тэнцүү хэсэгт хуваах C, D цэгүүдийг ол.

Бодолт. $C(x_c; y_c; z_c)$, $D(x_d; y_d; z_d)$ гэж тэмдэглэе.
$\overrightarrow{AC} = 0.5\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ байх тул

$$\begin{cases} x_c + 1 = 0.5(0 - x_c) \\ y_c - 2 = 0.5(3 - y_c) \\ z_c - 3 = 0.5(5 - z_c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = \frac{-1+0.5\cdot 0}{1+0.5} = -\frac{2}{3} \\ y_c = \frac{2+0.5\cdot 3}{1+0.5} = \frac{7}{3} \\ z_c = \frac{3+0.5\cdot 3}{1+0.5} = \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow$$



Зураг 12

$C(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3})$. Мөн $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ гэдгээс

$$\begin{cases} x_d + 1 = 2(0 - x_d) \\ y_d - 2 = 2(3 - y_d) \\ z_d - 3 = 2(5 - z_d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_d = \frac{-1+0\cdot 2}{1+2} = -\frac{1}{3} \\ y_d = \frac{2+2\cdot 3}{1+2} = \frac{8}{3} \\ z_d = \frac{3+2\cdot 5}{1+2} = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow D(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{8}{3}, \tfrac{13}{3}) \text{ байна.}$$

3.7. Векторуудын скаляр үржвэр, түүний чанар

Тодорхойлолт. *Тэгээс ялгаатай* **a, b** *векторын модулиуд ба тэдгээрийн хоорондох өнцгийн косинусын үржвэрийг* **a, b** *векторын скаляр үржвэр гэнэ.* $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$ векторуудын скаляр үржвэрийг

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(a \overset{\wedge}{;} b) \quad \text{буюу} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi$$

(Энд φ нь $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын хоорондох өнцөг) гэж тэмдэглэнэ.

Хэрэв **a, b** мекторуудын аль нэг нь тэг вектор бол эдгээрийн скаляр үржвэрийг тэг гэж тооцно.

$|\mathbf{b}|\cos\varphi$ нь **b** векторын **a** вектор дээрх проекц, $|\mathbf{a}|\cos\varphi$ нь **a** векторын **b** вектор дээрх проекц учраас $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторуудын скаляр үржвэрийг

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot \text{пр}_a b = |\mathbf{b}| \cdot \text{пр}_b a \tag{3.8}$$

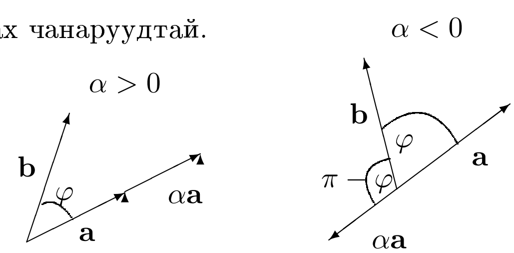
гэж тодорхойлж болно.

Векторуудын скаляр үржвэр дараах чанаруудтай.

Чанар 1. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (коммутатив).
Энэ чанарын баталгаа нь тодорхойлолтоос шууд гарна.

Чанар 2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Баталгаа. φ нь **a, b** векторуудын хоорондох өнцөг гэе.



Зураг 13

Хэрэв $\alpha > 0$ бол (зураг 13)
$(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = |\alpha||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = \alpha|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Хэрэв $\alpha < 0$ бол $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\pi - \varphi) = |\alpha||\mathbf{a}||\mathbf{b}|(-\cos\varphi) = -\alpha|\mathbf{a}||\mathbf{b}|(-\cos\varphi) = \alpha|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Хэрэв $\alpha = 0$ бол $(0 \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (0, \mathbf{b}) = 0$. ▲

Чанар 3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ (дистрибутив).

Баталгаа. Скаляр үржвэрийн (3.8) тодорхойлолтыг хэрэглэвэл

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = |\mathbf{c}|\text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\cdot(\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + \text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}) = \\ = |\mathbf{c}|\cdot\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + |\mathbf{c}|\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

Чанар 4. $\mathbf{a}$ векторыг өөрөөр нь скаляр үржсэн үржвэрийг $\mathbf{a}$ векторын скаляр квадрат гэх ба энэ нь $\mathbf{a}$ векторын модулийн квадраттай тэнцүү байна.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2, \qquad \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0^o = |\mathbf{a}|^2$$

Эндээс $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$ байна.

Жишээ 3.2. Хэрэв $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ ба $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\mathbf{m} \stackrel{\wedge}{,} \mathbf{n}) = \frac{\pi}{3}$ бол $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$-г ол.

Бодолт. Скаляр үржвэрийн 3-р чанар ба тодорхойлолтыг хэрэглэн $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (2\mathbf{m}-3\mathbf{n})\cdot(\mathbf{m}+2\mathbf{n}) = 2\mathbf{m}^2 + \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} - 6\mathbf{n}^2 = = 2\cdot|\mathbf{m}|^2 + |\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos\frac{\pi}{3} - 6|\mathbf{n}|^2 = 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 6\cdot 4 = -21$.

Теорем 3.2. Тэгээс ялгаатай хоёр вектор ортогональ байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэдгээрийн скаляр үржвэр тэгтэй тэнцүү байх явдал юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ортогональ гэе. Тэгвэл $(\mathbf{a} \stackrel{\wedge}{,} \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$ байх ба $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

$\Leftarrow$: $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ гэе. Тэгвэл $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a} \stackrel{\wedge}{,} \mathbf{b})$, $|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$ тул $\cos(\mathbf{a} \stackrel{\wedge}{,} \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{a} \stackrel{\wedge}{,} \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторууд ортогональ. ▲

3.8. Векторуудын скаляр үржвэрийг координатаар илэрхийлэх

$OXYZ$ системд $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ векторууд өгчээ гэе. Скаляр үржвэр $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$-г $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ координатуудаар илэрхийлъе.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k})\cdot(\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}) = \\ = \alpha_1\beta_1\mathbf{i}^2 + \alpha_2\beta_1(\mathbf{ij}) + \alpha_3\beta_1(\mathbf{ki}) + \alpha_1\beta_2(\mathbf{ij}) + \alpha_2\beta_2\mathbf{j}^2 + \\ + \alpha_3\beta_2(\mathbf{kj}) + \alpha_1\beta_3(\mathbf{ik}) + \alpha_2\beta_3(\mathbf{jk}) + \alpha_3\beta_3\mathbf{k}^2\end{aligned}$$

Энд $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ векторууд ортогональ. Иймээс

$$\mathbf{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_3 \tag{3.9}$$

гарна.

Ийнхүү $OXYZ$ тэгш өнцөгт декартын координатын системд хоёр векторын скаляр үржвэр нь эдгээр векторуудын ижил нэрт координатуудын үржвэрийн нийлбэртэй тэнцүү байна. Жишээлбэл: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ бол

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = 9$$

Хэрэв $\mathbf{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ бол $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = |\mathbf{a}|^2$ гэдгээс $|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. Жишээлбэл: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ векторын модуль нь

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$OXYZ$ системд өгсөн $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ цэгүүдийн хоорондох зай нь $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторын модультай тэнцүү байх тул

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

байна.

a, b векторуудын хоорондох өнцгийг эдгээрийн скаляр үржвэрийг ашиглан олно. Тухайлбал

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a} \,\hat{,}\, \mathbf{b}) \Rightarrow \cos(\mathbf{a} \,\hat{,}\, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

$$\cos(\mathbf{a} \,\hat{,}\, \mathbf{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

байна. Жишээлбэл: $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ бол

$$\cos(\mathbf{a} \,\hat{,}\, \mathbf{b}) = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{-1}{3\sqrt{3}}$$

$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *векторуудын ортогональ байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь*

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \tag{3.10}$$

Жишээ 3.3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ векторууд α-ийн ямар утганд ортогональ байх вэ?

Бодолт. Векторуудын ортогональ байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцлийн теорем 3.2-оор

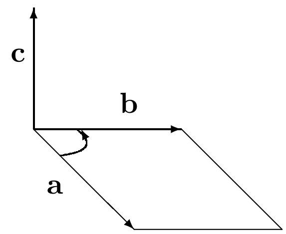
$$\mathbf{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 - \alpha \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 26$$

3.9. Векторуудын вектор үржвэр, түүний чанар

Коллинеар биш **a, b** векторуудыг авч үзье.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b})$ *модультай* **a, b** *векторуудтай ортогональ ба* **a, b, c** *нь баруун гуравт (зураг 14)үүсгэж байх* **c** *векторыг* **a, b** *векторуудын вектор үржвэр гэнэ.*

Тодорхойлолтоос харахад **a, b** векторуудын вектор үржвэр болох **c** векторын модуль нь **a, b** векторуудаар байгуулагдсан параллелограммын талбайтай тэнцүү, **c** вектор нь энэ параллелограммын хавтгайд перпендикуляр ба **c**-ийн төгсгөлөөс харахад **a** векторыг **b** вектор руу давхцтал эргүүлсэн богино эргүүлэлт цагийн зүүний эсрэг байна.



Зураг 14

a, b векторуудын вектор үржвэрийг $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ гэж тэмдэглэе.

Хэрэв **a, b** векторууд коллинеар бол $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ байна.

Векторуудын вектор үржвэр нь дараах чанартай. Үүнд:
ЧАНАР 1. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
Энэ чанарын баталгаа нь тодорхойлолтоос шууд мөрдөн гарна.
ЧАНАР 2. $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Баталгаа. **a, b** коллинеар бол $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ гэдгээс $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} \Rightarrow [\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ байна. $\alpha = 0$ бол $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} = [\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ гэж энэ тохиолдолд чанар 2 батлагдав.

Одоо **a, b** коллинеар биш $\alpha \neq 0$ байх тохиолдолыг авч үзье. $|[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\alpha\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cdot \sin(\alpha\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b}) = |\alpha||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b}) = |\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$.

$[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ вектор нь **a, b** векторуудад ортогональ байна.

Хэрэв $\alpha > 0$ бол $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ба $\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ эдгээр гуравтууд нь (ориентацаараа ижил) ижилхэн баруун (зүүн) гуравт үүсгэнэ.

Хэрэв $\alpha < 0$ бол $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ба $\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ нь (ориентациараа өөр) өөр өөр гуравт үүсгэнэ. Иймд $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ба $\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ векторууд нь ижил гуравтуудыг үүсгэнэ. ▲

ЧАНАР 3. $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$

ТЕОРЕМ 3.3. Тэгээс ялгаатай хоёр векторын вектор үржвэр тэг вектор байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь үржигдэхүүн векторууд коллинеар байх явдал юм.

Баталгаа. $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ гэе.
$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \sin(\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b}) = 0$ буюу $\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b} = \pi$ байна. Иймд $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторууд коллинеар байна.

Хэрэв **a, b** векторууд коллинеар бол $(\mathbf{a} \,\widehat{,}\, \mathbf{b}) = 0$ (π). Иймээс $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 0$ $\Rightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$. ▲

3.10. Векторуудын вектор үржвэрийг координатаар илэрхийлэх

$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ векторуудыг авч үзье.

$$\begin{aligned}[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}, \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}] = \\ = \alpha_1\beta_1[\mathbf{i},\mathbf{i}] + \alpha_2\beta_1[\mathbf{j},\mathbf{i}] + \alpha_3\beta_1[\mathbf{k},\mathbf{i}] + \\ + \alpha_1\beta_2[\mathbf{i},\mathbf{j}] + \alpha_2\beta_2[\mathbf{j},\mathbf{j}] + \alpha_2\beta_3[\mathbf{j},\mathbf{k}] + \\ + \alpha_1\beta_3[\mathbf{i},\mathbf{k}] + \alpha_3\beta_2[\mathbf{k},\mathbf{j}] + \alpha_3\beta_3[\mathbf{k},\mathbf{k}]\end{aligned}$$

$$[\mathbf{i},\mathbf{i}] = [\mathbf{j},\mathbf{j}] = [\mathbf{k},\mathbf{k}] = 0, \quad [\mathbf{i},\mathbf{j}] = \mathbf{k}, [\mathbf{k},\mathbf{i}] = \mathbf{j}, [\mathbf{j},\mathbf{k}] = \mathbf{i}$$

гэдгийг анхааран үзвэл

$$\begin{aligned}[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -\alpha_2\beta_1\mathbf{k} + \alpha_3\beta_1\mathbf{j} + \alpha_1\beta_2\mathbf{k} - \alpha_3\beta_2\mathbf{i} - \alpha_1\beta_3\mathbf{j} + \alpha_2\beta_3\mathbf{i} = \\ = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k} = \\ = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Энэ нь дараах 3-р эрэмбийн тодорхойлогчийг нэгдүгээр мөрөөр задалсан задаргаа байна.

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Жишээ 3.4. Хэрэв $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ бол $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ векторыг ол.

Бодолт. $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \mathbf{11i - j - 7k}$

Жишээ 3.5. Хэрэв ΔABC-ийн $A(1,2,-1), B(3,3,2), C(2,-1,1)$ бол ΔABC-ийн талбайг ол.

Бодолт. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$ байна. $\overrightarrow{AB} = (2,1,3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-3,2)$. Тэгвэл

$$\begin{aligned}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}^2} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{11^2 + (-1)^2 + (-7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{171} = \frac{3}{2}\sqrt{19}\end{aligned}$$

3.11. Векторуудын холимог үржвэр

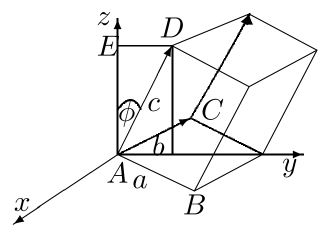
a, b, c векторуудыг авч үзье.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. **a, b** *векторуудын вектор* $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *үржвэр ба* **c** *векторын скаляр үржвэрийг* **a, b, c** *векторуудын холимог үржвэр гэнэ.* **a, b, c** векторуудын холимог үржвэрийг $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = [\mathbf{a},\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}$$

ТЕОРЕМ 3.4. Хэрэв $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AD}$ векторууд компланар биш бол эдгээр векторын холимог үржвэрийн модуль нь $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ векторууд дээр ирмэг нь орших параллелопепидийн эзэлхүүнтэй тэнцүү.

Баталгаа. **a, b, c** векторууд баруун гуравт үүсгэдэг гэе. Ирмэгүүд нь $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{AD}|$-тай тэнцүү параллелопепид байгуулая. Холимог үржвэрийн тодорхойлолтоор



Зураг 15

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]|\cdot|\mathbf{c}|\cos\varphi$$

байна. Энд φ нь $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \overrightarrow{AE}$ ба **c**-ийн хоорондох өнцөг $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$ нь параллелопипедийн ($|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|$ талтай) суурийн талбай, $|\mathbf{c}|\cdot\cos\varphi = H$ нь параллелопипедийн өндөр байна. Хэрэв a, b, c нь баруун гуравт үүсгэх тохиолдолд

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = V$$

V нь $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|, |\overrightarrow{AD}|$ талтай параллелопепидын эзэлхүүн.

Хэрэв **a, b, c** нь зүүн гуравт үүсгэх бол φ нь мохоо өнцөг байх ба $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = -V$ байна. Иймд $V = |(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})|$. ▲

ТЕОРЕМ 3.5. Тэгээс ялгаатай гурван векторын компланар байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэлгээрийн холимог үржвэр тэгтэй тэнцүү байх явдал юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{b}\neq\mathbf{0}, \mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ компланар юм гэе.

Хэрэв **a, b** нь коллинеар бол $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{0}$ байх ба $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$ байна.

Хэрэв **a, b** коллинеар биш бол $[\mathbf{a},\mathbf{b}], \mathbf{c}$ векторууд ортогональ байна. Иймд $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = [\mathbf{a},\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c} = 0$ болно.

$\Leftarrow$: $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0 \Rightarrow [\mathbf{a},\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c} = 0$. Эндээс $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ба **c** векторууд ортогональ эсвэл $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{0}$ гэсэн хоёр тохиолдол байна.

Хэрэв $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ба **c** векторууд ортогональ бол $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ векторууд компланар байх нь шууд харагдана.

Хэрэв $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{0}$ бол **a, b** векторууд коллинеар байна. Эндээс **a, b, c** векторууд компланар. ▲

a, b, c ба **b, c, a** векторууд нь ижил ориентацитай мөн **a, b, c** ба **b, a, c** векторууд ижил биш ориентацитай тул

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}), \qquad (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$$

байна.

$O\mathbf{ijk}$ системд $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k},\ \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k},\ \mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{i} + \gamma_2\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}$ гэж үзье. Тэгвэл

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

ба $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{i} + \gamma_2\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}$ векторуудын скаляр үржвэр

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\cdot\gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\gamma_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

байна. Иймээс $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ болно. Эндээс **a, b, c** компланар байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$

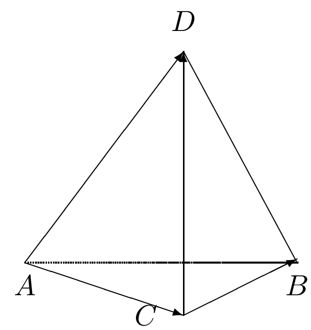
Жишээ 3.6. Хэрэв $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ бол $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$-г ол.

Бодолт. $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -22.$

Жишээ 3.7. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ бол $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ векторуудын ориентацийг ол.

Бодолт. $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -22 < 0$ тул **a, b, c** нь зүүн гуравт (зүүн ориентацитай) үүсгэнэ.

Жишээ 3.8. Хэрэв $\overrightarrow{AB} = 4\mathbf{i}-2\mathbf{j}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\overrightarrow{AC} = -3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ бол $ABCD$ тетраэдрын эзэлхүүнийг ол.



Зураг 16

Бодолт. Теорем 3.4-ийг ашиглавал

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}V_{\text{п/пипед}} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$$

байна.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = (-3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k})+(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ байна. Тэгвэл

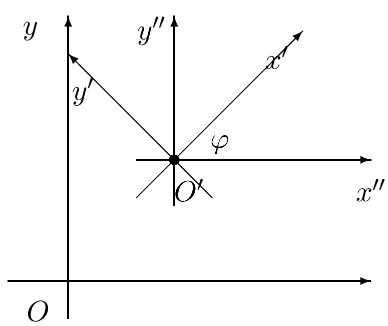
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ -2 & 10 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-144| = 26.$$

3.12. Координатыг хувиргах

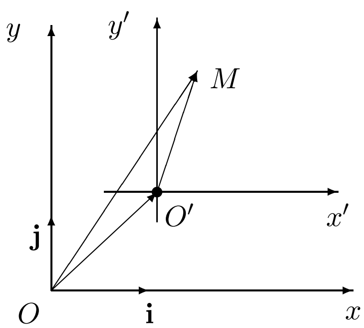
OXY, $O'X'Y'$ тэгш өнцөгт координатын системүүд өгчээ гэе. OXY системээс $O'X'Y'$ системд шилжье. Эхлээд OXY системийг $O'X''$ нь OX-тэй, $O'Y''$ нь OY-тэй ижил чиглэлтэй байхаар $O'X''Y''$ системд шилжүүлж дараа нь $O'X''Y''$ системийг O' цэг дээр төвтэй φ өнцгөөр эргүүлж $O'X'Y'$ системийг гарган авъя (зураг 17).

OXY системээс $O'X''Y''$ системд шилжихийг OXY системийн координатын тэнхлэгүүдийг параллель зөөх гэж нэрлэнэ. $O'X''Y''$ системээс $O'X'Y'$ системд шилжих хувиргалтыг координатын тэнхлэгүүдийг φ өнцгөөр эргүүлэх гэж нэрлэнэ.

Координатыг хувиргахын мөн чанар нь нэг координатын систем дэх M цэгийн координатаар (мэдснээр) нөгөө систем дэх M цэгийн координатыг илэрхийлэх явдал юм.



Зураг 17



Зураг 18

1. Координатын системийг параллель зөөх. Хавтгай дээр OXY ба $O'X'Y'$ гэсэн декартын координатын системийг авч үзье (зураг 18). OXY системд O' цэг нь (x_0, y_0) координаттай, хавтгайн дурын M цэг нь (x, y) координаттай, $O'X'Y'$ системд M цэг нь (x', y') координаттай юм гэе. Тэгвэл $\overrightarrow{OM}$ нь (x, y) координаттай, $\overrightarrow{O'M}$ нь (x', y') координаттай, $\overrightarrow{OO'}$ нь (x_0, y_0) координаттай байна. Тэгвэл $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ байна. Эндээс

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \qquad & x &= x_0 + x' \\ y' &= y - y_0 \qquad & y &= y_0 + y' \end{aligned}$$

томъёог координатын тэнхлэгүүдийг параллель зөөж координатыг хувиргах томъёо гэнэ.

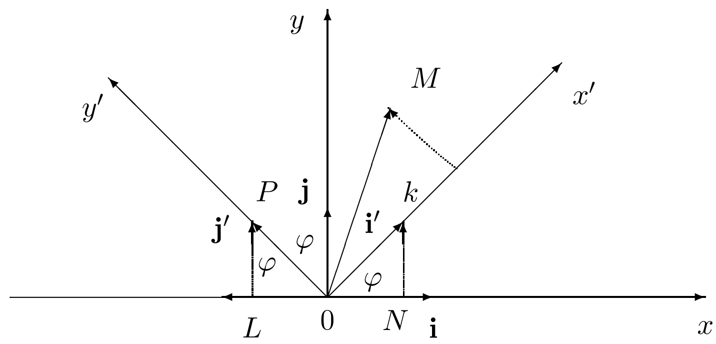
2. Хавтгай дээрх координатын тэнхлэгүүдийг эргүүлэх. OXY, $OX'Y'$ гэсэн тэгш өнцөгт декартын координатын системүүдийг авч үзье. $OXY = (O\mathbf{ij})$, $OX'Y' = (O\mathbf{i'j'})$ гэе (зураг 19). Хавтгайн дурын M цэг нь OXY системд (x, y), $OX'Y'$ системд (x', y') координаттай юм гэе. Тэгвэл

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{3.12}$$

$$\overrightarrow{OM} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' \tag{3.13}$$

байна.

Зураг 19



$$\frac{|\overrightarrow{ON}|}{|\mathbf{i}'|} = \cos\varphi \;\Rightarrow\; |\overrightarrow{ON}| = \cos\varphi \;\Rightarrow\; \overrightarrow{ON} = \mathbf{i}\cos\varphi$$

Үүнтэй адилаар $\overrightarrow{NK} = \mathbf{j}\sin\varphi$. Иймд

$$\mathbf{i}' = \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NK} = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi$$

$$\mathbf{j}' = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = \mathbf{i}(-\sin\varphi) + \mathbf{j}\cos\varphi$$

$\mathbf{i}', \mathbf{j}'$-г (3.13)-д орлуулахад

$$\overrightarrow{OM} = x'(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi) + y'(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)$$

$$\overrightarrow{OM} = (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\mathbf{i} + (x\sin\varphi + y'\cos\varphi)\mathbf{j}$$

болно. Үүнийг (3.12)-тай харьцуулбал

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

байна.

Үүнтэй адилаар огторгуй дахь $OXYZ$ системийг хувирган $O'X'Y'Z'$ системд шилжих томъёог гаргаж болно.

Хавтгайн координатын системийг параллель зөөх эргүүлэх хувиргалтыг дараалан хэрэглэж OXY системийг $O'X'Y'$ систем болгон хувиргах (зураг 3.13) томъёо нь

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0$$

байна.

3.13. Дасгал ба бодлогууд

№1. Тэгээс ялгаатай $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторуудын хувьд ямар нөхцөл биелэхэд дараах тэнцэтгэл тус бүр биелэх вэ?

а) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ **б)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ **в)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$
г) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ **д)** $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 0$ **е)** $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

№2. Ямар нөхцөл хангасан векторуудын хувьд дараах нөхцөл биелэх вэ?
а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ нь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторуудын хоорондох өнцгийг хагаслан хуваана.
б) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ вектор нь $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ векторт ортогональ.

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипед өгөгдөв.
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$ **б)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{AD_1}$
в) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{BD_1}$ **г)** $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C_1C}$
нийлбэрийг ол.

№4. A, B, C, D гэсэн дурын дөрвөн цэгийн хувьд M, N нь харгалзан AB ба CD хэрчмийн дундаж цэг бол $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ гэж батал.

№5. Координатаараа өгсөн $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторууд коллинеар эсэхийг шалга.
а) $\mathbf{a}\{-2;3;5\}$, $\mathbf{b}\{1;2;-3\}$ **б)** $\mathbf{a}\{4;2;0\}$, $\mathbf{b}\{2;1;0\}$.

№6. $A(2;-1)$, $B(3;2)$, $C(-1;6)$, $D(-2;3)$ цэгүүд өгчээ. $ABCD$ параллелограмм болохыг шалга.

№7. $A(-3;5)$, $B(2;1)$ төгсгөлтэй нэг төрлийн утасны хүндийн төвийг ол.

№8. $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ цэгүүд дээр m_1, m_2 массууд байрлажээ. Энэ системийн хүндийн төвийн координатыг ол.

№9. $\mathbf{a}(2;-3;-1)$ векторын төгсгөлийн цэг $(1;-1;2)$ бол эхний цэгийг ол.

№10. $|\mathbf{a}| = 2$ ба $\mathbf{a}$ вектор нь координатын OX, OY, OZ тэнхлэгүүдтэй харгалзан 45^o, 60^o, 120^o үүсгэх бол $\mathbf{a}$ векторын координатыг ол. Мөн $\cos^2 45^o + \cos^2 60^o + \cos^2 120^o$ илэрхийлэл хэдтэй тэнцэхийг бод.

№11. $\mathbf{a}\left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right)$ векторын чиглүүлэгч косинусуудыг ол.

№12. $\mathbf{a}(2;-3;6)$, $\mathbf{b}(-1;2;-2)$ векторуудын хоорондох өнцгийн биссектрис дагуу чиглэсэн $|\mathbf{c}| = 3\sqrt{42}$ байх $\mathbf{c}$ векторын координатыг ол.

№13. $\mathbf{c}(11;-6;5)$ векторыг $\mathbf{p}(3;-2;1)$, $\mathbf{q}(-1;1;2)$, $\mathbf{r}(2;1;-3)$ векторуудаар задал.

№14. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ векторууд $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$ нөхцлийг хангадаг ба $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$ бол $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$-г тооцоолж ол.

№15. Нэг цэгт үйлчлэх $M(3;-4;2)$, $N(2;3;-5)$, $P(-3;-2;4)$ хүчнүүдийн тэнцүү үйлчлэгч хүч уг цэгийг шулуун замаар $M_1(5;3;-7)$ цэгээс $M_2(4;-1;-4)$ цэгт шилжүүлэхэд хийх ажлыг ол.

№16. $\mathbf{a}(4;-2;-4)$, $\mathbf{b}(6;-3;2)$ векторуудыг **а)** $\mathbf{ab}$, **б)** $\sqrt{\mathbf{a}^2}$, **в)** $\sqrt{\mathbf{b}^2}$, **г)** $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$, **д)** $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$, **е)** $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$ бодож ол.

№17. $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$ оройтой гурвалжныг дотоод өнцгөөр нь адил хажуут болохыг баталж талуудын урт ба талбайг ол.

№18. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторуудын хоорондох өнцөг нь $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ба $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$ бол **а)** $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2$, **б)** $[(2a + b) \times (a + 2b)]^2$, **в)** $[(a + 3b) \times (3a - b)]^2$ бод.

№19. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторууд $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$ нөхцлийг хангадаг бол $[\mathbf{ab}] = [\mathbf{bc}] = [\mathbf{ca}]$ болохыг батал.

№20. $\mathbf{a}(3;-1;-2)$, $\mathbf{b}(1;2;-1)$ бол **а)** $[\mathbf{ab}]$, **б)** $[(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{b}]$, **в)** $[(2\mathbf{a}-\mathbf{b})(2\mathbf{a}+\mathbf{b})]$ векторуудын координатыг ол.

№21. $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$ оройтой гурвалжны талбайтай тэнцүү урт бүхий ΔABC-д перпендикуляр $\mathbf{a}$ векторын координатыг ол.

№22. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторууд баруун гуравт үүсгэдэг ба харилцан перпендикуляр $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$ бол $\mathbf{abc}$-г ол.

№23. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторууд $[\mathbf{ab}] + [\mathbf{bc}] + [\mathbf{ca}] = 0$ нөхцлийг хангадаг бол компланар болохыг батал.

№24. Дараах векторуудын компланар эсэхийг тогтоо.
а) $\mathbf{a}(2;3;-1)$, $\mathbf{b}(1;-1;3)$, $\mathbf{c}(1;9;-11)$
б) $\mathbf{a}(3;-2;1)$, $\mathbf{b}(2;1;2)$, $\mathbf{c}(3;-1;-2)$,
в) $\mathbf{a}(2;-1;2)$, $\mathbf{b}(1;2;-3)$, $\mathbf{c}(3;-4;7)$

№25. $A(2;3;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$ цэгт оройтой тетраэдрийн D оройгоос буулгасан өндрийг ол.

№26. $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ нь ортонормчлогдсон суурь бөгөөд ΔABC-д $\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{p} + 5\mathbf{q}$ бол CD өндрийн уртыг ол.

№27. $|\mathbf{m}| = 5$, $|\mathbf{n}| = 3$, $(\mathbf{m} \,\hat{,}\, \mathbf{n}) = \frac{\pi}{6}$ бол $\overrightarrow{AB} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$ векторуудаар байгуулагдсан параллелограммын талбайг ол.

№28. $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$ ортогональ нормчлогдсон суурь бол $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 12\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$ векторын $\mathbf{b} = [\mathbf{p} - 2\mathbf{r}, \mathbf{p} + 3\mathbf{q} - 4\mathbf{r}]$ вектор дээрх проекцийг ол.

№29. $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$ ортогональ нормчлогдсон суурь бөгөөд $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q} - 3\mathbf{r}$, $\mathbf{c} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} + \mathbf{r}$ векторуудаар байгуулагдсан параллелопипедийн эзлэхүүнийг ол.

№30. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ векторууд харгалзан $\{0;1;1\}$, $\{1;1;0\}$ координаттай. Хэрэв $|\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, $(\mathbf{c} \,\hat{,}\, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{4}$ бол $\mathbf{c}$ векторын координатыг ол.

№31. $\mathbf{a} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \alpha\mathbf{e_3}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e_1} + \beta\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3}$ $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ суурь векторууд өгсөн байг. α, β-ийн ямар утганд $\mathbf{a} \| \mathbf{b}$ байх вэ?

Хариу

1. **а)** $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, **б)** $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, **в)** $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, **г)** $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, **д)** $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$ ба $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, **е)** $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ **2.** **а)** $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, **б)** $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ **27.** Паралелограмм мөн **28.** $(-\frac{1}{2}, 3)$ **29.** $x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$, $z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$ **31.** $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = -10$

IV бүлэг. Шугам ба гадаргуугийн тэгшитгэл

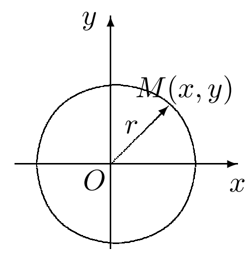
4.1. Хавтгайн шугамын тэгшитгэл

Тодорхойлолт. *OXY систем дэх ℓ шугамын цэгүүд $F(x, y) = 0$ тэгшитгэлийг хангаж, ℓ шугаман дээр оршихгүй цэгүүд энэ тэгшитгэлийг хангахгүй бол $F(x, y) = 0$ тэгшитгэлийг ℓ шугамын тэгшитгэл гэнэ.* Энэ тэгшитгэлд орж байгаа x, y хувьсагч нь ℓ шугамын дурын цэгийн координат.

Шугамын чанаруудыг ашиглан шугамын дурын цэгийн координат x, y-үүдийн хооронд холбоо хамаарал тогтоохыг шугамын тэгшитгэл бичлээ гэж ярьдаг.

Жишээ 4.1. Координатын эх дээр төвтэй r радиустай тойргийн тэгшитгэл бич.

Бодолт. Тойрог нь төв гэж нэрлэгдэх өгсөн цэгээс ижил зайд орших хавтгайн цэгүүдийн олонлог. Тойргийн тэгшитгэлийг бичихийн тулд энэ тойрог дээр орших дурын $M(x, y)$ цэг авна. Дээрх тодорхойлолтыг ашиглан x, y-ийн хооронд хамаарал зохионо.



Зураг 20

Энэ тойргийг $(0, r)$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\forall M(x, y) \in (0, r)$ тул $|\overrightarrow{OM}| = r$ байна. Тэгвэл $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ байх ба $x^2 + y^2 = r^2$ болно. Энд орсон x, y нь $(0, r)$ тойргийн дурын цэгийн координат учраас $(0, r)$ дээр орших ямар ч цэг $x^2 + y^2 = r^2$ тэгшитгэлийг хангана. $|\overrightarrow{OM}| < r$, $|\overrightarrow{OM}| > r$ байх цэгүүд энэ тэгшитгэлийг хангахгүй. Иймд $(0, r)$ тойргийн тэгшитгэл $x^2 + y^2 = r^2$ байна.

Аналитик геометрт шугамын чанаруудыг түүний тэгшитгэлийн чанарыг судлах асуудлаар дамжуулж судлана.

Аналитик геометрт $F(x, y) = 0$ тэгшитгэл өгөгдлөө гэдгийг $F(x, y) = 0$ шугам өгөгдлөө гэж ойлгоно.

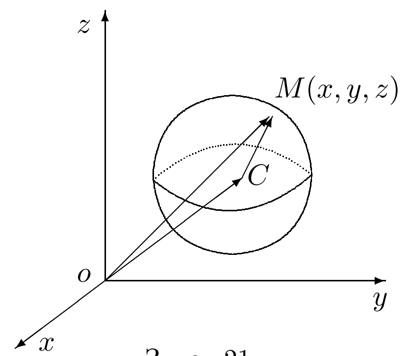
OXY декартын системд $F(x, y) = 0$ тэгшитгэл бүр ямар нэг шугам дүрслэх албагүй. Жишээлбэл: $x^2 + y^2 + 3 = 0$ тэгшитгэлийг хангах бодит x, y утга олдохгүй. Иймд $x^2 + y^2 + 3 = 0$ тэгшитгэл ямар нэгэн шугамыг дүрслэхгүй. Харин $x^2 + y^2 = 0$ тэгшитгэлийг ганцхан $(0, 0)$ цэг хангах тул энэ тэгшитгэл ганц $O(0, 0)$ цэгийг дүрслэнэ. $x^2 - y^2 = 0$ тэгшитгэлийг $(x - y)(x + y) = 0$ гэж бичвэл координат нь $x - y = 0$ буюу $x + y = 0$ тэгшитгэлүүдийг хангах цэгүүд $x^2 - y^2 = 0$ тэгшитгэлийг хангана. Иймд $x^2 - y^2 = 0$ тэгшитгэл нь $y = x$, $y = -x$ гэсэн хоёр шулууныг дүрслэнэ.

Координат нь $F(x,y) = 0$ тэгшитгэлийг хангах цэгүүдийн олонлогийг $F(x,y) = 0$ тэгшитгэлээр тодорхойлогдох геометрийн дүрс гэнэ.

4.2. Огторгуйн шугам ба гадаргуугийн тэгшитгэл

Тодорхойлолт. *$OXYZ$ системд байгаа S гадаргуу дээр орших дурын цэгийн координатууд хангадаг, гадаргуу дээр оршихгүй байгаа цэгийн координатууд хангахгүй байх $F(x,y,z) = 0$ тэгшитгэлийг гадаргуугийн тэгшитгэл гэнэ.* Энэ тэгшитгэлд байгаа x, y, z нь S гадаргуугийн дурын цэгийн координат.

Жишээ 4.2. Тэгш өнцөгт декартын $OXYZ$ системд $C(x_0, y_0, z_0)$ цэг дээр төвтэй a радиустай бөмбөлөгийн тэгшитгэлийг бич (зураг 21).



Зураг 21

Бодолт. Энэ бөмбөлөг дээр орших дурын $M(x,y,z)$ цэг авъя. Тэгвэл $|\overrightarrow{CM}| = a$ байна. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$, $\overrightarrow{OC} = (x_0, y_0, z_0)$ байх тул $\overrightarrow{CM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ болно. Иймд

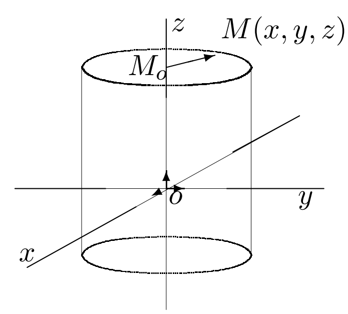
$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = a$$

буюу

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = a^2$$

байна. Энэ тэгшитгэл нь $OXYZ$ систем дэх бөмбөлөгийн тэгшитгэл.

Жишээ 4.3. Байгуулагч нь OZ тэнхлэгтэй параллель R радиустай шулуун дугуй цилиндрийн тэгшитгэлийг бич.



Зураг 22

Бодолт. OZ тэнхлэгээс R зайд орших бүх цэгүүдийн олонлог нь энэ OZ тэнхлэгтэй параллель байгуулагчтай дугуй цилиндрийг үүсгэнэ (зураг 22). Тэгшитгэлийг нь бичих цилиндрийг S гэж тэмдэглэе. Энд S-ийн тэгшитгэлийг бичихийн тулд

1. $\forall M(x,y,z) \in S$ авна.
2. M цэгийн OZ дээрх проекц $M_0(0,0,z)$-ийг олно.
3. $\overrightarrow{M_0M} = (x-0, y-0, z-z)$ $\overrightarrow{M_0M} = (x,y,0)$ векторыг байгуулъя.
4. $|\overrightarrow{MM_0}| = R \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = R \Rightarrow x^2+y^2 = R^2$ болно. Энд x, y нь $\forall M \in S$ цэгийн координат учраас $x^2 + y^2 = R^2$ нь **S**-ийн тэгшитгэл мөн.

Хэрэв $M \notin S$ бол $x^2 + y^2 \neq R^2$ байна.

Жишээ 4.4. $x^2+y^2=25$ цилиндр гадаргуу дээр $B(1,2,-3)$, $M(4,-3,1)$ цэгүүд орших эсэхийг тогтоо.

Бодолт. $1^2+2^2\neq 25$. Иймд $B(1,2,-3)$ цэг $x^2+y^2=25$ гадаргуу дээр оршихгүй. $4^2+(-3)^2=25$ байгаа учраас $M(4,-3,1)$ цэг $x^2+y^2=25$ гадаргуугийн цэг мөн.

Жишээ 4.5. $OXYZ$ координатын системийн OXY координатын хавтгайн тэгшитгэлийг бич.

Бодолт. $z=0$ тэгшитгэлийг OXY хавтгай дээр орших дурын $(x,y,0)$ хангана. Харин OXY хавтгай дээр оршихгүй (x,y,z) цэгүүд энэ тэгшитгэлийг хангахгүй. Иймд координатын OXY хавтгайн тэгшитгэл $z=0$ болно.

$OXYZ$ системд $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ гэсэн тэгшитгэлтэй S_1,S_2 гадаргуунууд өгчээ гэе. Энэ хоёр тэгшитгэлийг зэрэг хангах цэгүүдийн олонлог нь

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{4.1}$$

системийг хангана.

Огторгуйн шугамыг хоёр гадаргуугийн огтолцол гэж ойлгоно. Тэгвэл (4.1) системийг хангагч цэгүүд нь S_1,S_2 гадаргуугийн огтлолцлын шугам дээр орших цэгүүд байна. Иймээс S_1,S_2 гадаргуугийн огтлолцолд үүсэх шугам нь

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

гэсэн тэгшитгэлтэй байна.

Жишээ 4.6. Тэгш өнцөгт декартын координатын $OXYZ$ системд координатын эх дээр төвтэй, координатын OXY хавтгай дээр хэвтэх a радиустай тойргийн тэгшитгэлийг бич.

Бодолт. Ийм тойрог нь координатын эх дээр төвтэй a радиустай бөмбөлөг ба координатын OXY хавтгайн огтлолцол гэж үзнэ. Координатын OXY хавтгай нь $z=0$ тэгшитгэлтэй, бөмбөлөг нь $x^2+y^2+z^2=a^2$ тэгшитгэлтэй учраас тэгшитгэлийг нь бичих тойрог нь

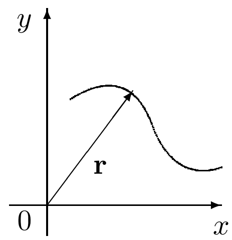
$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

тэгшитгэлтэй байна.

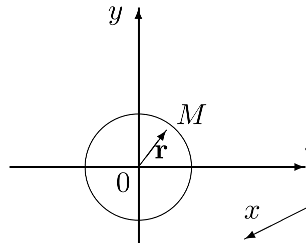
Алгебрийн $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ систем өгөхөд энэ системийг хангадаг цэгүүдийн олонлог нь огторгуйн ямар нэг шугамыг дүрслэнэ.

4.3. Гадаргуу ба хавтгайн шугамын вектор тэгшитгэл

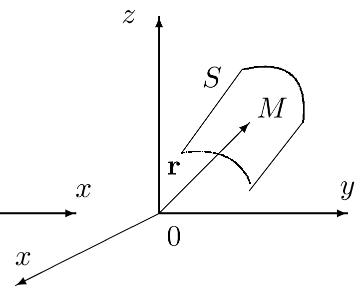
Хавтгайн OXY декартын координатын системд ℓ шугам (зураг 23) өгөгдсөн байг. Энэ шугамын дурын M цэгийн радиус векторыг $\mathbf{r}$ гэж тэмдэглэе.



Зураг 23



Зураг 24



Зураг 25

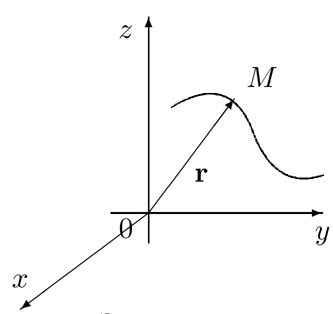
Тодорхойлолт. *ℓ шугам дээр орших дурын цэгийн радиус вектор хангаж байх энэ ℓ шугам дээр оршихгүй байгаа цэгүүдийн радиус вектор хангахгүй байх $F(\mathbf{r}) = 0$ хэлбэрийн тэгшитгэлийг ℓ шугамын вектор хэлбэртэй тэгшитгэл гэнэ.* Жишээлбэл: координатын эх дээр төвтэй a радиустай тойргийн вектор тэгшитгэл нь $|\mathbf{r}| = a$ байна (зураг 24).

$OXYZ$ системд S гадаргуу өгчээ гэе (зураг 25). S гадаргуугийн дурын цэгийн радиус векторыг $\mathbf{r}$ гэж тэмдэглэе.

Тодорхойлолт. *S гадаргуугийн дурын цэгийн радиус вектор хангадаг, S дээр оршихгүй цэгийн радиус вектор хангахгүй байх $F(\mathbf{r}) = 0$ ($OXYZ$ системд) тэгшитгэлийг S гадаргуугийн вектор хэлбэртэй тэгшитгэл гэнэ.* Жишээлбэл: координатын эх дээр төвтэй a радиустай бөмбөлгийн вектор хэлбэртэй тэгшитгэл нь $|\mathbf{r}| = a$ байна.

4.4. Шугамын параметр ба параметртэй вектор тэгшитгэл

Шугамын параметртэй вектор тэгшитгэл. Декартын $OXYZ$ системд ℓ шугам өгчээ гэе (зураг 26). Энэ ℓ шугамын дурын цэгийн байрлал нь түүний радиус вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$-ээр тодорхойлогдоно. M цэг ℓ шугамын дагуу хөдлөхөд түүний радиус вектор $\mathbf{r}$ өөрчлөгдөнө. Энэ өөрчлөгдөж байгаа $\mathbf{r}$ радиус векторыг ямар нэг скаляр параметр t-ээр илэрхийлбэл



Зураг 26

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{4.2}$$

болно.

Тодорхойлолт. *(4.2) тэгшитгэлийг огторгуйн ℓ шугамын параметртэй вектор тэгшитгэл гэнэ.*

Үүнтэй адилаар хэвтгай дээр декартын OXY систем дэх шугамын параметртэй вектор тэгшитгэлийг тодорхойлно.

Шугамын параметр тэгшитгэл. Огторгуйн ℓ шугам (4.2) тэгшитгэлтэй юм гэе. Хэрэв (x, y, z) нь $\mathbf{r}$ радиус векторын координат гэвэл (4.2) тэгшитгэл нь

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{4.3}$$

тэгшитгэлтэй тэнцүү чанартай.

Тодорхойлолт. *(4.3) тэгшитгэлийг ℓ шугамын $OXYZ$ систем дэх параметр тэгшитгэл гэнэ.*

Хэрэв ℓ хавтгайн шугам бол

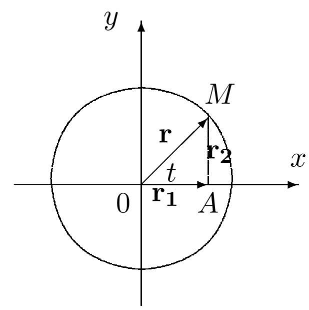
$$x = x(t),\ y = y(t) \tag{4.4}$$

нь хавтгайн ℓ шугамын параметр тэгшитгэл гэнэ.

(4.3) тэгшитгэлүүдээс t параметрийг зайлуулбал $F(x, y) = 0$ тэгшитгэл гарах ба энэ нь хавтгайн шугамыг дүрслэнэ.

Жишээ 4.7. Декартын OXY системд координатын эх дээр төвтэй a радиустай тойргийн параметртэй вектор, параметр (зураг 27) тэгшитгэлүүдийг бич.

Бодолт. Тойрог дээр орших дурын M цэгийн радиус векторыг $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ гэе. $\mathbf{r}$ векторын OX тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг t, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r_1}$, $\overrightarrow{AM} = \mathbf{r_2}$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \mathbf{r_2}$ ба $\mathbf{r_1} = (a\cos t)\mathbf{i}$ $\mathbf{r_2} = (a\sin t)\mathbf{j}$ гэдгээс



Зураг 27

$$\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} \tag{4.5}$$

болно. (4.5) тэгшитгэл нь тойргийн параметртэй вектор тэгшитгэл байна. Энэ тойргийн параметр тэгшитгэл нь

$$x = a\cos t \quad y = a\sin t$$

болно. Энэ сүүлчийн тэгшитгэлээс t параметрийг зайлуулбал $x^2 + y^2 = a^2$ тэгшитгэл болно. Энэ нь тойргийн координатын хэлбэртэй тэгшитгэл.

4.5. Алгебрийн шугам ба гадаргуу

Тодорхойлолт. *Хэрэв ℓ шугам нь OXY системд алгебрийн тэгшитгэлээр дүрслэгдэж байвал ℓ шугамыг алгебрийн шугам гэнэ.*

Хоёр хувьсагчтай алгебрийн тэгшитгэлийн ерөнхий хэлбэр нь

$$\sum_{i=1}^{k} A_i x^{m_i} y^{n_i} = 0 \tag{4.6}$$

байна. Энд A_i нь бодит тоо, m_i, n_i нь эерэг бүхэл тоо.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *$A_j \neq 0$, $m_j + n_j = s$ нь $m_i + n_i$ $i = \overline{1,k}$ тоонуудын хамгийн их бол S-г (4.6) алгебрийн шугамын эрэмбэ гэнэ.* Жишээлбэл: $x^3+y^3-3xy=0$ нь гуравдугаар эрэмбийн алгебрийн шугамын тэгшитгэл байна.

ТЕОРЕМ 4.1. Хэрэв ℓ шугам нь OXY декартын координатын системд S эрэмбийн алгебрийн шугам бол дурын өөр декартын координатын системд ℓ шугам нь мөн S эрэмбийн алгебрийн шугам байна.

Баталгаа. ℓ шугам нь OXY системд (4.6) тэгшитгэлтэй гэе. OXY декартын системийг $\mathbf{a}(x_0, y_0)$ вектороор параллель зөөж, дараа нь φ өнцгөөр эргүүлж $O'X'Y'$ системийг гаргасан бол координатыг хувиргах томъёо нь

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0, \qquad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0$$

байдаг. Иймд ℓ шугам нь $O'X'Y'$ системд

$$\sum_{i=1}^{k} A_i (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0)^{m_i} (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0)^{n_i} = 0$$

тэгшитгэлтэй болно. Хаалтыг нээж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{A_i} x_i'^{m_i} y'^{n_i} = 0 \tag{4.7}$$

болно. Энэ тэгшитгэл нь S-ээс хэтрэхгүй эрэмбийн алгебрийн тэгшитгэл. (4.7) тэгшитгэлд

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi - x_0, \qquad y' = -x\sin\varphi + y'\cos\varphi - y_0$$

гэсэн орлуулга хийвэл (4.6) тэгшитгэлд шилжинэ. Иймд ℓ шугам нь $O'X'Y'$ системд алгебрийн шугам байна. ▲

Энэ теоремоос параллель зөөлт, эргүүлэлт хувиргалтуудаар алгебрийн шугамын эрэмбэ өөрчлөгдөхгүй гэдэг нь харагдаж байна.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хэрэв F гадаргуу нь $OXYZ$ системд*

$$\sum_{i=1}^{k} A_i x^{m_i} y^{n_i} z^{p_i} = 0 \tag{4.8}$$

тэгшитгэлтэй бол F гадаргууг алгебрийн гадаргуу гэнэ. Энд $A_i \in \mathbb{R}, m_i, n_i, p_i$-эерэг бүхэл тоонууд.

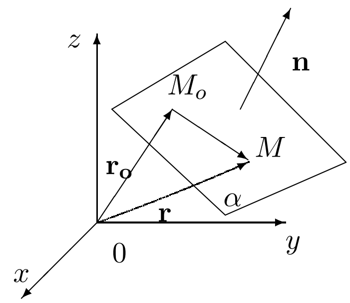
$A_j \neq 0$ ба $m_j + n_j + p_j = s$ нь $m_i + n_i + p_i \quad (i = \overline{1,k})$ тоонуудын хамгийн их нь бол s-г алгебрийн гадаргуугийн эрэмбэ гэнэ.

Алгебрийн гадаргуугийн хувьд теорем 3.6 хүчинтэй.

4.6. Огторгуй дахь хавтгай ба шулууны ерөнхий тэгшитгэл

$OXYZ$ системд α хавтгай авч үзье.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *$M_0(\mathbf{r_0}) \in \alpha$, ба $\mathbf{n} \perp \alpha$ вектор өгөгдсөнөөр α хавтгайн байрлал бүрэн тодорхойлогдоно. Хавтгайд перпендикуляр тэгээс ялгаатай $\mathbf{n}$ векторыг энэ хавтгайн нормаль вектор гэнэ* (зураг 28).



Зураг 28

α хавтгайн дурын $M(\mathbf{r})$ цэгийн хувьд $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ вектор $\mathbf{n}$ векторт перпендикуляр байна ($\mathbf{n} \perp \alpha$, $\overrightarrow{M_0M} \subset \alpha \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}$). Иймд

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r_0}) = 0 \tag{4.9}$$

байна. (4.9) тэгшитгэлийг хангадаг бүх $M(\mathbf{r})$ цэгүүд ямар нэг хавтгайг дүрслэнэ ($\mathbf{n}$, $\mathbf{r_0}$ бэхэлсэн тэгээс ялгаатай векторууд).

Үнэндээ (4.9) тэгшитгэл нь $\mathbf{n}$, $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ векторуудын ортогональ байгааг заана. Энэ нь (4.9) тэгшитгэлийг хангаж байгаа бүх $\mathbf{r}$ векторын хувьд $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ векторууд нэг хавтгай дээр ($\mathbf{n}$ векторт перпендикуляр хавтгай дээр) оршино гэдгийг харуулж байна. Иймд $M(\mathbf{r})$ цэгүүд нэг хавтгай дээр оршино. Энэ нь (4.9) тэгшитгэлийг хангадаг цэгүүд нэг хавтгайг дүрслэнэ гэдгийг харуулж байна.

(4.9) тэгшитгэл нь M_0 цэгийг дайрсан $\mathbf{n}$ векторт перпендикуляр хавтгайн вектор хэлбэртэй тэгшитгэл байна.

Хэрэв $\mathbf{n}(A, B, C), \mathbf{r_0}(x_0, y_0, z_0), \mathbf{r}(x, y, z)$ бол (4.9) тэгшитгэл

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{4.10}$$

хэлбэртэй болно. $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ гэдгээс $|A| + |B| + |C| \neq 0$ байна.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *(4.10) тэгшитгэлийг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ цэгийг дайрсан $\mathbf{n}(A, B, C)$ векторт перпендикуляр хавтгайн координатын хэлбэр дэх тэгшитгэл гэнэ.* Жишээлбэл: $(2, -1, -3)$ цэгийг дайрсан $\mathbf{n}(3, 2, -4)$ векторт перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэл нь $3(x - 2) + 2(y + 1) - 4(z + 3) = 0$ байна.

Тодорхойлолт. *Хэрэв* $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$ *гэж тэмдэглэвэл (4.10) тэгшитгэлийг*

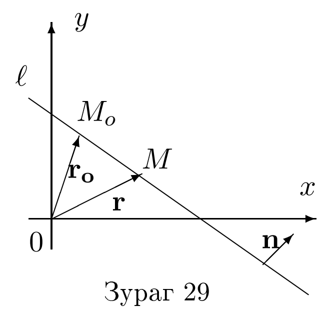
$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.11}$$

гэж бичих ба энэ тэгшитгэлийг хавтгайн ерөнхий тэгшитгэл гэнэ.

Дээрх (4.11) тэгшитгэлээс ямар ч хавтгай нь тэгш өнцөгт декартын координатын системд гурван хувьсагчтай нэгдүгээр зэргийн алгебрийн тэгшитгэлээр дүрслэгддэг болох нь харагдаж байна. $Ax + By + Cz + D = 0$ тэгшитгэлийг (4.9) хэлбэрт шилжүүлж болох тул гурван хувьсагчтай нэгдүгээр зэргийн

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(энд $|A|+|B|+|C| \neq 0$) тэгшитгэл бүхэн $OXYZ$ системд хавтгай дүрслэнэ. Иймд α хавтгайг өгөх (α хавтгай олох) нь $Ax + By + Cz + D = 0$ тэгшитгэл өгөхтэй (олохтой) адил юм. OXY системд ℓ шулуун өгсөн байг (зураг 29). M_0 цэгийг дайрсан, $\mathbf{n}$ векторт перпендикуляр шулууны вектор хэлбэртэй тэгшитгэл нь (4.9) тэгшитгэлтэй ижил хэлбэртэй байна. Тухайлбал $\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = \overrightarrow{M_0M} \subset \ell \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n} \Rightarrow (\overrightarrow{M_0M},\ \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n}) = 0$. Энэ тэгшитгэлийг $\mathbf{n}$ нормаль вектортай, $M_0(\mathbf{r_0})$ цэгийг дайрсан шулууны вектор хэлбэртэй тэгшитгэл гэнэ.



Зураг 29

Тодорхойлолт. *Хэрэв* $M_0(x_0, y_0) \in \ell$, $\ell \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (A, B)$ *бол*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Энэ тэгшитгэлийг шулууны координатын хэлбэртэй тэгшитгэл гэнэ.

$C = -(Ax_0 + By_0)$ *гэж тэмдэглэвэл шулууны координатын хэлбэртэй тэгшитгэл нь*

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| \neq 0$$

болно. Үүнийг хавтгайн шулууны ерөнхий тэгшитгэл гэнэ.

Эндээс хавтгайн шулуун бүхэн хоёр хувьсагчтай нэгдүгээр зэргийн алгебрийн тэгшитгэлээр дүрслэгдэнэ гэдэг нь харагдаж байна. Мөн үүний урвуу өгүүлбэр: хоёр хувьсагчтай нэгдүгээр зэргийн алгебрийн $Ax+By+C=0$, $|A|+|B| \neq 0$ тэгшитгэл бүхэн OXY системд ямар нэг шулууныг дүрслэнэ гэдэг нь үнэн.

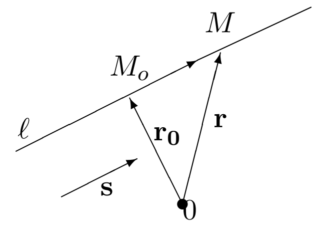
4.7. Шулууны параметртэй вектор тэгшитгэл

Огторгуйн (хавтгайн) ℓ шулуун өгсөн гэе. 0 тэгш өнцөгт декартын координатын системийн эх (зураг 3.25).

Тодорхойлолт. *ℓ шулууны $M_0(\mathbf{r_0})$ цэг, ℓ шулуунтай паралель тэгээс ялгаатай $\mathbf{s}$ вектор өгснөөр ℓ шулууны байр бүрэн тодорхойлогдоно. $\mathbf{s}$ векторыг ℓ шулууны чиглүүлэгч вектор гэнэ.*

ℓ шулууны дурын $M(r)$ цэгийн хувьд $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0} \subset \ell$ ба $\mathbf{s}$, $\overrightarrow{M_0M}$ векторууд коллинеар. Иймээс $\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = t\mathbf{s}$ буюу

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{s} \tag{4.12}$$



Зураг 30

Энд t-бодит параметр. Ингэж огторгуйн (хавтгайн) ℓ шулуунд түүний цэгүүд хангах (4.12) тэгшитгэл харгалзаж байна.

Үүний урвуу өгүүлбэр: (4.12) хэлбэрийн ($\mathbf{r_0}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ бэхэлсэн векторууд $\forall t \in \mathbb{R}$) тэгшитгэлд огторгуйн (хавтгайн) шулуун харгалзана гэдэг нь үнэн.

Тодорхойлолт. *(4.12) тэгшитгэлийг шулууны параметртэй вектор тэгшитгэл гэнэ.*

4.8. Шулууны хялбар ба параметр хэлбэртэй тэгшитгэл. Өнцгийн коэффициенттэй шулууны тэгшитгэл

Огторгуйн тэгш өнцөгт декартын координатын $OXYZ$ системд ℓ шулуун өгсөн байг (зураг 3.25).

Хэрэв $\mathbf{r_0}(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{s}(m, n, p)$ бол ℓ шулууны параметртэй вектор тэгшитгэл (4.12)-ийг

$$x = x_0 + mt \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt \tag{4.13}$$

хэлбэртэй бичиж болно.

Тодорхойлолт. *(4.13) тэгшитгэлийг огторгуйн шулууны параметр тэгшитгэл гэнэ.* Жишээлбэл: $(2, -1, 7)$ цэгийг дайрсан $\mathbf{s}(-5, 3, 4)$ векторт параллель шулууны параметр тэгшитгэл нь

$$x = 2 - 5t, \qquad y = -1 + 3t, \qquad z = 7 + 4t$$

болно.

(4.13) тэгшитгэлээс t параметрийг олбол

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{4.14}$$

байна.

Тодорхойлолт. *(4.14) тэгшитгэлийг огторгуйн шулууны хялбар тэгшитгэл гэнэ.*

$m,\ n,\ p$ тоонуудын нэг буюу хоёр нь ч тэг байж болно. Энэ тохиолдолд шулууны тэгшитгэлийг (4.14) хэлбэртэй бичиж болно.

Хэрэв ℓ шулуун нь хавтгайн декартын тэгш өнцөгт координатын OXY системд өгсөн бол параметр тэгшитгэл нь

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt$$

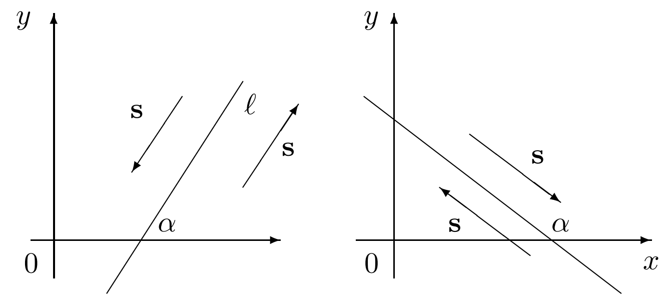
хялбар тэгшитгэл нь

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{4.15}$$

хэлбэртэй байна. Энд $M_0(x_0, y_0) \in \ell,\ \ m, n$ нь чиглүүлэгч векторын координат.

Хэрэв шулуун OY тэнхлэгтэй параллель биш бол (4.15) тэгшитгэлийг $y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0)$ хэлбэртэй бичиж болно. Энд $\frac{m}{n} = \mathrm{tg}\ \alpha = k$ (энд α нь ℓ шулууны Ox тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй үүсгэсэн өнцөг) гэж тэмдэглэвэл шулууны тэгшитгэл $y - y_0 = k(x - x_0)$ болно (зураг 31).

$k = \mathrm{tg}\,\alpha$*-г* ℓ *шулууны өнцгийн коэффициент гэнэ.*



Зураг 31

Жишээлбэл: $(-2, 3)$ цэгийг дайрсан, OX тэнхлэгтэй $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ өнцөг үүсгэсэн шулууны тэгшитгэл нь

$$y - 3 = \mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{4}(x + 2) \Rightarrow y - 3 = -1(x + 2) \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

болно.

4.9. Огторгуйн шулууны ерөнхий тэгшитгэл

Тэгш өнцөгт декартын $OXYZ$ системд паралель биш

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D = 0, \quad \alpha_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$$

хавтгайнууд авч үзье.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \alpha_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{N_1}(A_1, B_1, C_1) \perp \alpha_1 \\ \mathbf{N_2}(A_2, B_2, C_2) \perp \alpha_2 \end{array} \tag{4.16}$$

Энэ (4.16) систем нь төгсгөлгүй олон шийдтэй. Энэ шийдүүдийн олонлог нь огторгуйн шулууныг дүрслэнэ.

Тодорхойлолт. *(4.16) тэгшитгэлийг огторгуйн шулууны ерөнхий тэгшитгэл гэнэ.*

(4.16) тэгшитгэлээс (4.14) хялбар тэгшитгэлд шилжихдээ энэ шулууны $M_0(x_0, y_0, z_0)$ цэгийг ө.х. (4.16) системийн нэг шийд (x_0, y_0, z_0)-ийг, мөн чиглүүлэгч $\mathbf{s}(m, n, p)$ векторыг олно.

Чиглүүлэгч вектор $\mathbf{s}$ нь $\mathbf{n_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ векторуудад хоёуланд нь перпендикуляр тул $\mathbf{s}$ нь $[\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}]$ вектортой коллинеар. Ингэхлээр $\mathbf{s}$-ээр $[\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}]$ векторыг $(\mathbf{s} = [\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}])$ авна.

Жишээ 4.8.

$$\left.\begin{array}{r} 2\cdot x - 3\cdot y + 5\cdot z - 4 = 0 \\ 3\cdot x + 4\cdot y - z - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

Шулууны ерөнхий тэгшитгэлийг хялбар тэгшитгэлд шилжүүл.

Бодолт. $(2, 0, 0)$ нь энэ шулууны цэгүүдийн нэг мөн. $\mathbf{n_1} = (2, -3, 5)$, $\mathbf{n_2} = (3, 4, -1)$ тул

$$S = [\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}] = [2i - 3j + 5z, 3i + 4j - z] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -17i + 17j + 17k$$

Иймд энэ шулууны эгэл тэгшитгэл нь $\dfrac{x-2}{-17} = \dfrac{y-0}{17} = \dfrac{z-0}{17}$ буюу $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ байна.

4.10. Хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл

$OXYZ$ системд $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ цэг өгсөн байг. Энэ хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бичье.

Үүний тулд тэгшитгэлийг нь бичих ℓ шулууны дурын $M(x, y, z)$ цэг авъя. $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ векторуудыг байгуулъя. $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$ векторууд коллинеар байна. Иймд олох ℓ шулууны тэгшитгэл нь

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

болно.

Хэрэв $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ цэгүүд хавтгайн OXY системд орших цэгүүд бол M_1, M_2 цэгүүдийг дайрах шулууны тэгшитгэл нь

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

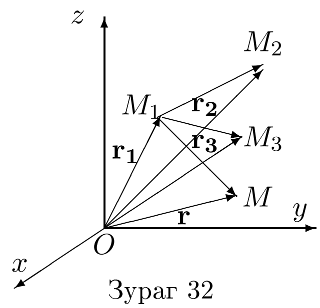
байна.

4.11. Гурван цэгийг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл

$OXYZ$ системд $M_1(\mathbf{r_1})$, $M_2(\mathbf{r_2})$, $M_3(\mathbf{r_3})$ гэсэн нэг шулуун дээр оршихгүй цэгүүд өгсөн байг. Энэ гурван цэгийг дайруулан цор ганц хавтгай татаж болдогийг бид мэднэ. Энэ хавтгайн тэгшитгэлийг бичье (зураг 32).

Тэгшитгэлийг нь бичих хавтгайг α гэж тэмдэглэе. $\forall M(\mathbf{r}) \in \alpha$ авъя. $\overrightarrow{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}$ векторуудыг байгуулъя. $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ векторууд α хавтгай дээр хэвтэх тул тэдгээрийн холимог үржвэр тэгтэй тэнцэнэ.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_1}, \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}, \mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}) = 0 \tag{4.17}$$



Зураг 32

Тодорхойлолт. *(4.17) тэгшитгэлийг гурван цэгийг дайрсан хавтгайн вектор хэлбэртэй тэгшитгэл гэнэ.*

Тодорхойлолт. *Хэрэв цэгүүд $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ гэж координатаараа өгөгдсөн бол (4.17) тэгшитгэл нь*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

хэлбэртэй болно. Үүнийг гурван цэгийг дайрсан хавтгайн координатын хэлбэртэй тэгшитгэл гэнэ.

4.12. Хавтгайнуудын хоорондох өнцөг. Хавтгайн шулуунуудын хоорондох өнцөг. Параллель ба перпендикуляр байх нөхцөл

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \quad & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \alpha_2 : \quad & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

α_1, α_2 хавтгайг авч үзье. α_1, α_2 хавтгайн огтлолцолд үүсэх φ_1 өнцөг $\mathbf{n_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ векторуудын хооронд үүсэх φ өнцөгтэй тэнцүү эсвэл $\pi - \varphi$ өнцөгтэй тэнцүү ($\varphi_1 = \varphi$ буюу $\varphi_1 = \pi - \varphi$).
Тэгвэл

$$\cos\varphi = \pm\frac{(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})}{|\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{4.18}$$

болно. (4.18) томъёоноос хавтгайнуудын паралель ба перпендикуляр байх нөхцлүүд гарна.

1. $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ бол $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$ векторууд коллинеар байна. Мөн $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$ векторууд коллинеар бол $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ байна. Иймд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{4.19}$$

нь α_1, α_2 хавтгайн паралель байх нөхцөл болно.

2. $\alpha_1 \perp \alpha_2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{n_1} \perp \mathbf{n_2}$ байна. Иймд $\varphi = \frac{\pi}{2}$ тул (4.18)-аас

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{4.20}$$

гэж гарна. Энэ нь $\alpha_1 \perp \alpha_2$ байх нөхцөл болно. Өөрөөр хэлбэл

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Жишээ 4.9. α-ийн ямар утганд $\alpha_1 :\; 2x + 3y + \alpha z + 1 = 0$, $\alpha_2 :\; x + 6y + 3z - 2 = 0$ хавтгайнууд **а)** паралель, **б)** перпендикуляр байх вэ?

Бодолт. **а)** $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ учраас $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{\alpha}{3} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{3}{2}$ байна.
б) (4.20) $\Leftrightarrow \alpha_1 \perp \alpha_2$ учраас $2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot \alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{26}{3}$.

$\ell_1 :\; A_1x+B_1y+C_1 = 0$, $\ell_2 :\; A_2x+B_2y+C_2 = 0$ гэсэн хавтгайн хоёр шулууны хоорондох өнцөг φ нь $\mathbf{n_1}(A_1, B_1)$, $\mathbf{n_2}(A_2, B_2)$ векторуудын хоорондох өнцгөөр тодорхойлогдоно. Иймд

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{4.21}$$

байна. ℓ_1, ℓ_2 шулуунууд паралель бол нормаль векторууд $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ нь коллинеар байна. Иймээс

$$\ell_1 \parallel \ell_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

болно. Мөн $\ell_1 \perp \ell_2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{n_1} \perp \mathbf{n_2}$ байх учраас

$$\ell_1 \perp \ell_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

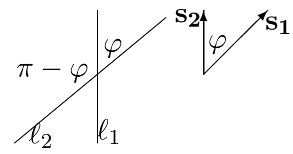
болно.

4.13. Хялбар тэгшитгэлээр өгсөн хоёр шулууны хоорондох өнцөг. Параллель ба перпендикуляр байх нөхцөл

Oxyz системд

$$\ell_1 :\; \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \qquad \ell_2 :\; \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

хоёр шулуун өгөгдсөн байг. Эдгээр шулуунуудын хооронд үүсэх өнцгүүдийн нэг φ нь $\mathbf{s_1}(m_1, n_1, p_1)$, $\mathbf{s_2}(m_2, n_2, p_2)$ векторуудын хоорондох өнцөг φ-тэй тэнцүү. Нөгөө өнцөг нь $\pi - \varphi$-тэй тэнцүү байна. Иймд



Зураг 33

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \tag{4.22}$$

байна. (4.22) томъёоноос шулууны паралель ба перпендикуляр байх нөхцөл мөрдөн гарна.

1. $\ell_1 \parallel \ell_2 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{s_1},\ \mathbf{s_2}$ коллинеар байх юм. Иймд

$$\ell_1 \parallel \ell_2 \ \Leftrightarrow\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

байна.

2. $\ell_1 \perp \ell_2 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{s_1},\ \mathbf{s_2}$ векторууд ортогональ байх юм. Иймд

$$\ell_1 \perp \ell_2 \ \Leftrightarrow\ (\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}) = 0$$

буюу

$$\ell_1 \perp \ell_2 \ \Leftrightarrow\ m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

байна. Хавтгайн

$$\ell_1 :\ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \qquad \ell_2 :\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$$

шулуунуудын хоорондох өнцгийг

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$$

томъёогоор олно. Энэ томъёоноос $\ell_1,\ \ell_2$ шулууны паралель ба перпендикуляр байх нөхцлүүд гарна. Энэ нь

$$\begin{aligned} \ell_1 \parallel \ell_2 \ &\Leftrightarrow\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \\ \ell_1 \perp \ell_2 \ &\Leftrightarrow\ m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \end{aligned}$$

байна.

4.14. Хавтгай шулууны хоорондох өнцөг параллель ба перпендикуляр байх нөхцөл

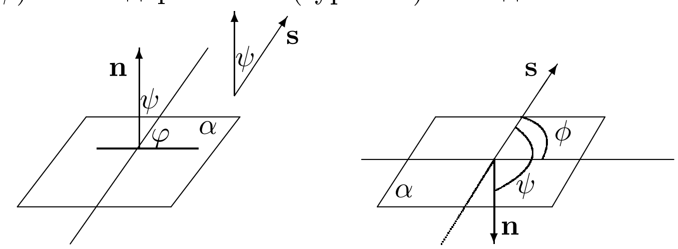
Тэгш өнцөгт декартын $OXYZ$ системд

$$\alpha: \; Ax + By + Cz + D = 0, \quad \mathbf{n}(A, B, C) \perp \alpha$$
$$\ell: \; \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad \mathbf{s}(m, n, p) \parallel \ell$$

хавтгай, шулууныг авч үзье.

Шулуун хавтгайн хоорондох φ өнцөгийг нь $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$ векторуудын хоорондох өнцөг ψ-ээр $\pm(\frac{\pi}{2} - \psi)$ гэж тодорхойлоно (зураг 34). Иймд

Зураг 34



$$\cos\psi = \cos(\frac{\pi}{2} \pm \varphi) = \pm\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \left|\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}\right| = \left|\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}\right| \tag{4.23}$$

Хавтгай ба шулууны паралель байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$ векторууд ортогональ байх юм. Иймд

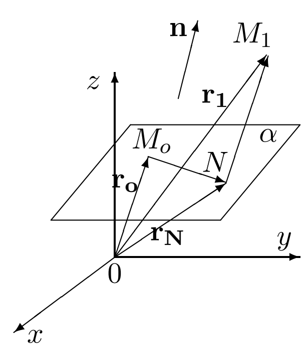
$$\ell \parallel \alpha \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{n}, \mathbf{s}) = 0 \quad \text{буюу} \quad \ell \parallel \alpha \;\Leftrightarrow\; Am + Bn + Cp = 0.$$

$\alpha \perp \ell \Leftrightarrow \mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ векторууд коллинеар байна. Иймд $\alpha \perp \ell \;\Leftrightarrow\; \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

4.15. Цэгээс хавтгай хүрэх зай, цэгээс хавтгайн шулуун хүрэх зай

$Oxyz$ системд α : $(\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r_0}) = 0$ хавтгай, $M_1(r_1)$ цэг өгсөн байг. M_1 цэгээс α хавтгай хүрэх зай d-г олъё (зураг 35). M_1 цэгээс α хавтгайд перпендикуляр буулгаж суурийн цэгийг N-ээр тэмдэглэвэл
$\overrightarrow{NM_1} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r}_N$, $\mathbf{r}_N = \mathbf{r_0} + \overrightarrow{M_0N} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{NM_1} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_0} - \overrightarrow{M_0N} \tag{4.24}$$



Зураг 35

(4.24)-ийн хоёр талыг $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \mathbf{n_0}$-аар скаляр үржүүлбэл

$$(\overrightarrow{NM_1}, \mathbf{n_0}) = (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n_0}) - (\overrightarrow{M_0N}, \mathbf{n_0})$$

болно.

$$(\overrightarrow{NM_1}, \mathbf{n_0}) = \pm d, \qquad (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n_0}) = \frac{(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|}, \qquad (\overrightarrow{M_0N}, \mathbf{n_0}) = 0$$

гэдгийг анхаарвал нь

$$\pm d = \frac{(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|} \text{ буюу } d = \frac{|(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|} \tag{4.25}$$

болно. (4.25)-г координатын хэлбэрт бичье.
Хэрэв $\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0$ ба $M_1(x_1, y_1, z_1)$ бол

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{4.26}$$

байна.

Жишээ 4.10. $(2, -1, 3)$ цэгээс $3x - 4y + 12z + 6 = 0$ хавтгай хүртэлх зайг ол.

Бодолт. (4.26) томъёогоор

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 12 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = 4$$

Хэрэв хавтгайн OXY системд $\ell: \ Ax+By+C = 0$ тэгшитгэлтэй ℓ шулуун, $M_1(x_1, y_1)$ цэг өгсөн байг. Тэгвэл M_1 цэгээс ℓ шулуун хүртэлх зайг

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{4.27}$$

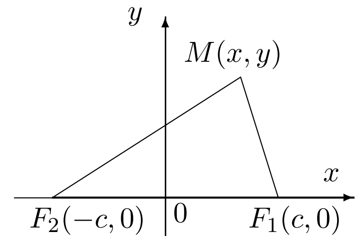
томъёогоор олно.

4.16. Эллипс

Тодорхойлолт. *Фокус гэж нэрлэгдэх өгсөн хоёр цэг хүртэлх зайн нийлбэр тогтмол байх цэгүүдийн олонлогийг эллипс гэнэ.*

Фокусуудыг F_1, F_2, фокусуудын хоорондох зайг $2c$, эллипсийн дурын цэгээс фокусууд хүртэлх зайн нийлбэрийг $2a$ гэж тэмдэглэе. Тодорхойлолтоос үзэхэд $a > c$ байна.

Декартын OXY системийн OX тэнхлэгийг F_1, F_2 фокусуудыг дайрсан, координатын эхийг фокусуудын дундаж цэг байхаар авч OXY системийг сонгоё (зураг 36). Тэгвэл $F_1(+c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ байна. Тодорхойлолтоор эллипсийн дурын $M(x, y)$ цэгийн хувьд



Зураг 36

$$|MF_2| + |MF_1| = 2a \tag{4.28}$$

тэнцэл биелнэ. $|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ эдгээрийг (4.28)-д орлуулбал

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{4.29}$$

болно. (4.29)-ийг эллипс дээр орших дурын цэгийн координат хангаж, эллипс дээр оршихгүй цэгийн координатууд хангахгүй тул (4.29) нь эллипсийн тэгшитгэл болно. (4.29) тэгшитгэлийг дараах байдлаар хялбарчилъя.

$$(4.29) \ \Rightarrow \ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{4.30}$$

Үүнийг квадрат зэрэгт дэвшүүлж эмхтгэвэл

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$
$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{4.31}$$

$a > c \ \Rightarrow \ (a^2 - c^2) > 0$ үүнийг $a^2 - c^2 = b^2$ гэж тэмдэглэж (4.31)-д орлуулбал

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

болох ба хоёр талыг нь a^2b^2-д хуваавал

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.32}$$

болно.

(4.29) тэгшитгэлийг хоёр дахин квадрат зэрэгт дэвшүүлж (4.32)-г гаргасан тул (4.32) нь (4.29)-тэй тэнцүү чанартай байх нь илэрхий биш байна. Иймд (4.32)-г эллипсийн тэгшитгэл мөн болохыг баталъя.

(4.32) тэгшитгэлийг хангах $M(x, y)$ цэгийн хувьд (4.28) биелэхийг баталъя.

Энэ $M(x,y)$ цэгийн хувьд $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ байх ба

$$
\begin{aligned}
|MF_1| &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)} = \\
&= \sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2} = \\
&= \frac{\sqrt{c^2x^2-2xca^2+a^2c^2+a^2(a^2-c^2)}}{a} = \frac{\sqrt{(a^2-xc)^2}}{a} = \frac{|a^2-cx|}{a}
\end{aligned}
$$

$c < a$, $|x| \le a$ гэдгээс $a^2 - cx$ нь эерэг байна. Иймд

$$|MF_1| = \frac{a^2-cx}{a}$$

үүнтэй адилаар

$$|MF_2| = \frac{a^2+cx}{a}$$

болно. Эндээс

$$|MF_1| + |MF_2| = \frac{a^2-cx}{a} + \frac{a^2+cx}{a} = \frac{2a^2}{a} = 2a$$

Ингэж (4.32) тэгшитгэлийг хангадаг M цэг нь эллипсийн цэг мөн гэж батлагдав.

Тодорхойлолт. *(4.32) тэгшитгэлийг эллипсийн хялбар тэгшитгэл гэнэ. a эллипсийн их хагас тэнхлэг, b эллипсийн бага хагас тэнхлэг гэнэ. Эллипсийн хялбар тэгшитгэл нь x, y хувьсагчийн хувьд хоёр зэргийн алгебрийн тэгшитгэл байна. Хоёрдугаар зэргийн алгебрийн тэгшитгэлээр дүрслэгдэх шугамыг хоёрдугаар эрэмбийн муруй гэж нэрлэнэ.*

Тэгэхлээр эллипс нь хоёрдугаар эрэмбийн муруй байна.

4.17. Эллипсийг байгуулах

Эллипсийн

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (0 < b < a)$$

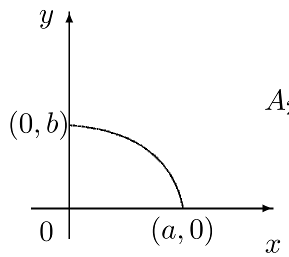
хялбар тэгшитгэлийг авч үзье.

Эллипсийн тэгшитгэлд хувьсагч x, y нь тэгш зэрэгтэй байгаа тул (x, y) цэг эллипсийн цэг бол $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ цэгүүд эллипсийн цэгүүд болно. Иймд эллипс нь Ox, Oy тэнхлэг мөн координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй байрлана. Иймээс эллипсийг координатын I мөчид байгуулъя.

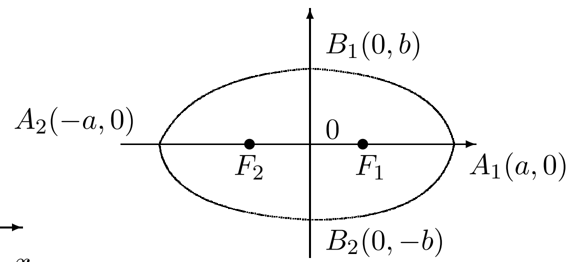
Хялбар тэгшитгэлээс y-г олбол

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

болно. Энэ функцийн тодорхойлогдох муж нь $0 \le x \le a$ байна. Иймд $x > a$ байх цэг эллипсийн цэг биш байна. x өсөхөд y буурч байна. $x = a$ үед $y = 0$. $x = 0$ үед $y = b$ болох ба $(a, 0)$, $(0, b)$ цэгүүд нь эллипсийн цэг. Энэ чанаруудыг ашиглан эллипсийг I мөчид зуръя (зураг 37).



Зураг 37



Зураг 38

Эллипс нь координатын тэнхлэгүүд, координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй гэдгийг тооцоолж эллипсийг зурна (зураг 38).

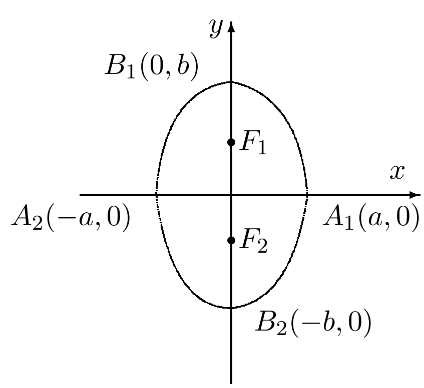
ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Эллипсийн тэгш хэмийн тэнхлэгүүдийн огтлолцлын цэгийг эллипсийн төв гэнэ. Эллипсийн тэгшитгэл нь хялбар тэгшитгэл байх тохиолдолд координатын эх нь төв болно.* $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ *цэгүүдийг эллипсийн оройн цэгүүд гэнэ.* $|A_1A_2| = 2a$ *урттай* A_1A_2 *хэрчмийг эллипсийн их тэнхлэг,* $2b$ *урттай* B_1B_2 *хэрчмийг эллипсийн бага тэнхлэг гэнэ.*

$c < a$ учраас F_1, F_2 фокусууд нь OX тэнхлэг дээр A_1, A_2 оройнуудын хооронд байрлана. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $b > a$ бол эллипсийн фокусууд нь OY тэнхлэг дээр (ө.х. их тэнхлэг нь OY тэнхлэг дээр байна) байрлана (зураг 39).

Хэрэв $a = b$ бол эллипсийн хялбар тэгшитгэл

$$x^2 + y^2 = a^2$$

хэлбэртэй болно. Энэ нь $O(0, 0)$ төвтэй a радиустай тойргийн тэгшитгэл байна.



Зураг 39

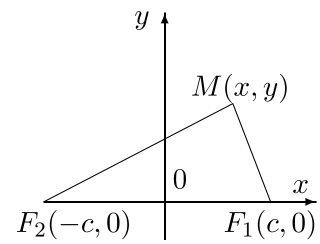
4.18. Гипербол

Тодорхойлолт. *Фокус гэж нэрлэгдэх өгсөн хоёр цэг хүртэлх зайн ялгаврын модуль нь тогтмол байх цэгүүдийн олонлог (геометрийн байр)-ийг гипербол гэнэ.*

Фокусуудыг F_1, F_2, $|F_1,F_2| = 2c$, $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$ гэж тэмдэглэе. Тодорхойлолтоос $0 < a < c$ байх нь харагдаж байна.

Координатын системийг сонгохдоо F_1, F_2 фокусууд абсцисс тэнхлэг дээр эхийн хувьд тэгш хэмтэй байхаар сонгоё. Тэгвэл $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ байна. Гиперболын дурын $M(x,y)$ цэгийн хувьд гурвалжны тэнцэл бишээр $2a < 2c \Rightarrow a < c$ байна. $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$

$$|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a \tag{4.33}$$



Зураг 40

$|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,
$|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ байх ба

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

тэнцэл биелнэ.

Эллипсийн хялбар тэгшитгэлийг гаргасантай адил үйлдлээр иррационалиас чөлөөлбөл

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

болно. $a < c$, $c^2 - a^2 > 0$ учраас $c^2 - a^2 = b^2$ гэж тэмдэглэвэл

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.34}$$

тэгшитгэл гарна. (4.34) нь гиперболын хялбар тэгшитгэл.

Координат нь (4.34) тэгшитгэлийг хангах $M(x,y)$ цэг гиперболын цэг байна гэдгийг баталъя.

Үүний тулд (4.34) тэгшитгэлийг хангах $M(x,y)$ цэг (4.33) нөхцлийг хангана гэж харуулна. Координат нь (4.34)-г хангах $M(x,y)$ цэгийн хувьд $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ байх ба

$$|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \left|\frac{cx - a^2}{a}\right|$$

болох ба $a < c$ ба $a < x$ тул $cx - a^2 > 0 \Rightarrow |cx - a^2| = cx - a^2$ байна. Иймд $|MF_1| = \dfrac{cx - a^2}{a}$ болно. Үүнтэй адилаар $|MF_2| = \dfrac{cx + a^2}{a}$ гэж гаргана.

Эндээс

$$\Big||MF_1| - |MF_2|\Big| = \left|\frac{cx - a^2}{a} - \frac{cx + a^2}{a}\right| = \left|\frac{-2a^2}{a}\right| = 2a$$

Ингэж (4.34) тэгшитгэлийг хангах $M(x, y)$ цэг (4.33) тэнцлийг хангав. Ийнхүү координат нь (4.34) тэгшитгэлийг хангадаг M цэг гиперболын цэг болох нь батлагдав. ▲

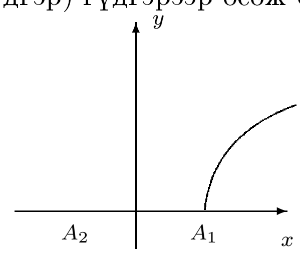
4.19. Гиперболыг байгуулах

Гиперболын тэгшитгэлд хувьсагч нь тэгш зэрэгтэй орсон байгаа учраас $M(x, y)$ цэг гиперболын тэгшитгэлийг хангавал $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ координаттай цэгүүд гиперболын тэгшитгэлийг хангана. Иймд гипербол нь координатын тэнхлэгүүд ба координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй байрлана. Ингэхлээр гиперболын графикийг зөвхөн координатын I мөчид байгуулъя. (4.34) тэгшитгэлээс y-г олбол

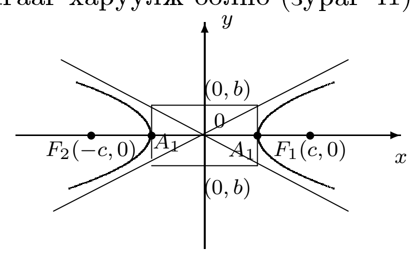
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

болно. Энэ функцийн тодорхойлогдох муж нь $x \in]-\infty; -a] \cup [a; \infty[$ байна. $x = a$ бол $y = 0$, $x = -a$ бол $y = 0$ байна. $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ гиперболын оройн цэг гэнэ. Гиперболын тэгшитгэлээс $]-a, a[$ завсарт гиперболын цэгүүд олдохгүй (байхгүй) байх нь харагдаж байна. Иймээс (4.34) тэгшитгэлтэй гипербол OY тэнхлэгийг огтлохгүй. $x \in [a, \infty[$ завсарт өсөхөд y-ийн утга өсч байна. Өөрөөр хэлбэл гиперболын $M(x, y)$ цэг OX, OY тэнхлэгүүдээс төгсгөлгүй холдоно.

y функцийн II эрэмбийн уламжлалын ашиглан $x \in [a, \infty[$ завсарт y функц (график гүдгэр) гүдгэрээр өсөж байгааг харуулж болно (зураг 41).



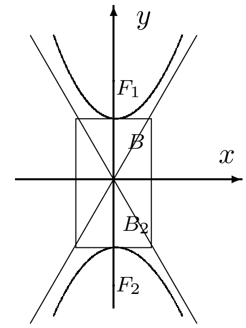
Зураг 41



Зураг 42

Координатын тэнхлэгүүд ба координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй гэдгийг харгалзан гиперболыг зурна (зураг 42). Гипербол нь гиперболын баруун зүүн салаа (мөчир) гэж нэрлэгдэх хоёр хэсгээс тогтоно.

Тодорхойлолт. *OX, OY тэнхлэгүүдийг тэгш хэмийн тэнхлэг гэх ба тэгш хэмийн тэнхлэгүүдийн огтлолын цэгийг гиперболын төв гэнэ. (4.34) хялбар тэгшитгэлтэй гиперболын төв нь координатын эх $O(0,0)$ байна. $|A_1A_2| = 2a$ урттай A_1A_2 хэрчмийг гиперболын бодит тэнхлэг (өөрөөр хэлбэл гиперболын фокусууд байрлах тэнхлэгийг бодит) a-г бодит хагас тэнхлэг гэнэ. $2b$ урттай B_1B_2 хэрчмийг гиперболын хуурмаг тэнхлэг, b-г хуурмаг хагас тэнхлэг гэнэ.*



Зураг 43

Хэрэв гиперболын хялбар тэгшитгэл нь

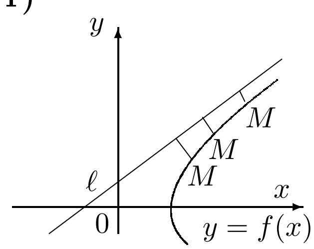
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

хэлбэртэй байвал бодит тэнхлэг нь OY тэнхлэг дээр $(2b)$, фокусууд нь мөн OY тэнхлэг дээр байрлана (зураг 43). $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ орой, $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$ фокус болно.

Тодорхойлолт. *Хэрэв $a = b$ бол (4.34) нь $x^2 - y^2 = a^2$ болно. Энэ тохиолдолд гиперболыг адил талт гипербол гэнэ.*

4.20. Гиперболын чиглүүлэгч (асимптот)

Тодорхойлолт. *$y = f(x)$ муруйн дагуу M цэг координатын эхээс төгсгөлгүй холдоход ($x \to \pm\infty$) M цэгээс ℓ шулуун (өгсөн) хүртэлх зай тэг рүү тэмүүлж байвал ℓ шулууныг $y = f(x)$ муруйн чиглүүлэгч (асимптот) гэнэ (зураг 44).*



Зураг 44

Муруй бүхэн чиглүүлэгчтэй байх албагүй, харин төгсгөлгүй мөчир бүхий муруй энэ чанарыг агуулах нь бий.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тэгшитгэлтэй гипербол авч үзье.

Гипербол нь төгсгөлгүй мөчиртэй тул чиглүүлэгчтэй байж болно.

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{4.35}$$

шулуун гиперболын чиглүүлэгч нь болохыг баталъя. Зөвхөн координатын I мөчид орших гиперболын салааны (мөчрийн) хувьд баталгааг хийхэд хүрэлцээтэй.

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ гипербол дээр орших $M_0(x_0, y_0)$ цэг авъя. $M_0(x_0, y_0)$ цэгээс $y = \frac{b}{a}x$ $(bx - ay = 0)$ шулуун хүртэлх зайг олбол

$$d = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{4.36}$$

$M_0(x_0, y_0)$ цэгийн координатуудын хувьд $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}$ байна. Үүнийг (4.36)-д орлуулбал

$$d = \frac{|bx_0 - b\sqrt{x_0^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}|x_0 - \sqrt{x_0^2 - a^2}|$$

болно. Сүүлчийн тэнцлийг $|x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}|$-аар үржүүлж хуваахад

$$d = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a^2}{|x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}|}$$

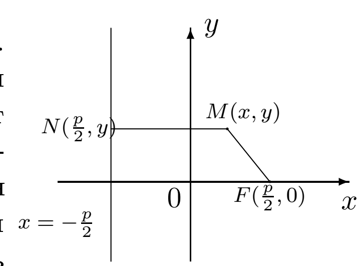
M_0 цэг координатын эхээс гипербол дагуу төгсгөлгүй холдоход өөрөөр хэлбэл $x_0 \to \pm\infty$ үед $d \to 0$ нь харагдаж байна (сүүлчийн тэнцлээс). Эндээс $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ нь $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболын чиглүүлэгч болох нь батлагдав. ▲

Гиперболыг тэгшитгэлээр нь байгуулахдаа эхлээд чиглүүлэгчээ байгуулах нь зохимжтой.

4.21. Парабол

Тодорхойлолт. *Фокус гэж нэрлэгдэх өгсөн цэг хүртэлх зай нь, директрис гэж нэрлэгдэх өгсөн шулуун хүртэлх зайтай тэнцүү байх хавтгайн цэгүүдийн олонлогийг парабол гэнэ.*

Фокусаас директрис хүрэх зайг $p > 0$ гэе. Параболын хялбар тэгшитгэлийг гаргахын тулд координатын OX тэнхлэгийг директрист перпендикуляр, фокус нь OX дээр байрлахаар, координатын эхийг фокус директрисийн хоорондох зайг хагаслан хувааж байхаар авъя (зураг 45). Тэгвэл директрисийн тэгшитгэл нь $x = -\frac{p}{2}$ буюу $x + \frac{p}{2} = 0$. Фокус нь $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$ координаттай байна. Параболын дурын $M(x, y)$ цэгийн хувьд



Зураг 45

$$|MF| = |MN|, \qquad |MF| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}, \qquad |MN| = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2}$$

байх ба

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2} \tag{4.37}$$

тэнцэл биелнэ. Энэ тэгшитгэлийн хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлбэл

$$y^2 = 2px \tag{4.38}$$

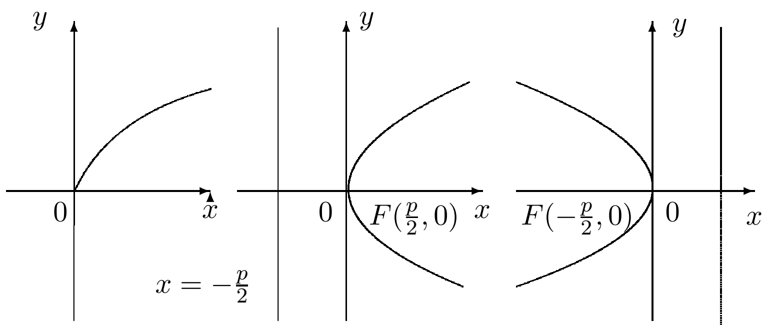
гарна.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Энэ (4.38) тэгшитгэлийг параболын хялбар тэгшитгэл гэнэ. r-г параметр гэнэ.* Тэгшитгэлээс нь харахад парабол нь 2-р эрэмбийн муруй байна.

4.22. Параболыг байгуулах

$y^2 = 2px$, $p > 0$ тэгшитгэлтэй параболыг байгуулъя. Тэгшитгэлд y-ийн квадрат зэрэгт орсон учраас (x, y), $(x, -y)$ координаттай цэгүүд параболын тэгшитгэлийг хангана. Эндээс $y^2 = 2px$ тэгшитгэлтэй муруй нь OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Иймд $y^2 = 2px$ муруйн OX тэнхлэгээс дээш орших хэсгийн графикийг байгуулъя (өөрөөр хэлбэл $y = \sqrt{2px}$ тэгшитгэлээр байгуулна).

(4.38) тэгшитгэлээс y-г олбол $y = \pm\sqrt{2px}$ болно. Уул муруйн OX-ээс дээш орших хэсгийг байгуулах тул $y = \sqrt{2px}$, $p > 0$ тэгшитгэлийг авч үзье. Энэ функцийн тодорхойлогдох муж нь $x \in [0, \infty[$ байна. x өсөхөд y өснө. $y = \sqrt{2px}$ функцийн 2-р эрэмбийн уламжлал ашиглан $[0, \infty[$ завсар дээр уг муруй гүдгэрээр өсөхийг тогтоож болно (зураг 46). OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй гэдгийг ашиглан $y^2 = 2px$ муруйг байгуулна (зураг 47).

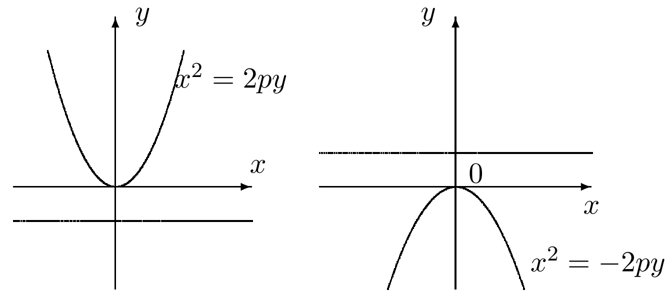


Зураг 46 Зураг 47 Зураг 48

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Парабол нь ганц тэгш хэмийн тэнхлэгтэй тул төвгүй муруй. Параболын тэгш хэмийн тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг параболын оройн цэг гэнэ. $y^2 = 2px$ параболын оройн цэг нь координатын эх $O(0, 0)$ байна. $y^2 = 2px$ параболын фокус нь OX тэнхлэг дээр байна.*

$y^2 = -2px$, $p > 0$ тэгшитгэл нь координатын эх дээр оройтой, OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй параболыг тодорхойлно. $-2px$, $p > 0$ нь $x < 0$ үед эерэг тэмдэгтэй байх тул $y^2 = -2px$, $p > 0$ парабол нь координатын II, III мөчид зурагдана (зураг 48).

$x^2 = \pm 2py$ $p > 0$ тэгшитгэл нь мөн параболыг дүрслэнэ (зураг 49). Фокус нь OY тэнхлэг дээр байна. Парабол нь төгсгөлгүй мөчиртэй (салаатай) боловч чиглүүлэгчгүй муруй юм.



Зураг 49

4.23. Эллипс, гиперболын эксцентристет

Тодорхойлолт. *Эллипсийн хоёр фокусын хоорондох зайг их тэнхлэгт харьцуулсан харьцааг эксцентристет гэнэ.*

Хялбар тэгшитгэлтэй эллипс авч үзье.

Эксцентристетийг ε-ээр тэмдэглэвэл

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} < 1, \quad 0 \le \varepsilon < 1 \tag{4.39}$$

байна. Хэрэв $a = b$ буюу $c = 0$ бол $\varepsilon = 0$ байна. $c = \sqrt{a^2 - b^2}$-г (4.39)-д орлуулбал

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} \quad \text{буюу} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

болно. Эндээс ε нь тэгд хичнээн их ойртох тутам $\frac{b}{a}$ нь нэгд төдийчинээ ойртоно гэж харагдаж байна. Энэ нь эллипсийн хэлбэр тойрог руу ойртоно гэсэн үг юм. Ингэхлээр эксцентристет нь эллипсийн хэлбэрийг (эллипсийг шахах зэргийг заана) ямар нэг хэмжээгээр тодорхойлж байна.

Хэрэв эллипсийн хялбар тэгшитгэлд $b > a$ бол $\varepsilon = \frac{c}{b}$ байна.

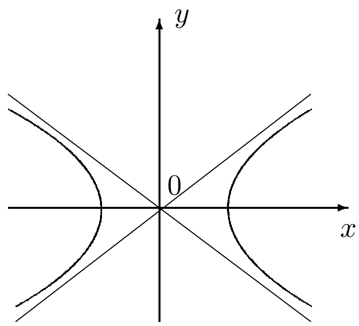
Тодорхойлолт. *Гиперболын фокусуудын хоорондох зайг бодит тэнхлэгийн урт 2a-д харьцуулсан харьцааг гиперболын эксцентристет гэнэ.*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

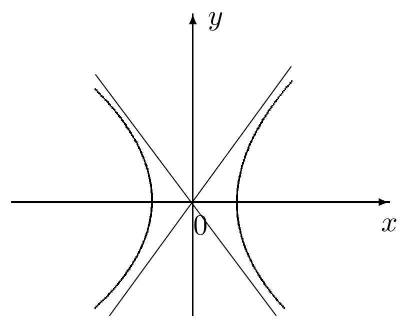
тэгшитгэлтэй гиперболын эксцентристет $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1$ байна. Эксцентристетийг хагас тэнхлэгүүдээр илэрхийлбэл

$$\varepsilon = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}$$

болно. Эндээс $\frac{b}{a} = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ болох ба эксцентристет нэгд хичнээн их ойртох тутам $\frac{b}{a}$ харьцаа тэгд төдийчинээ ойртоно. Энэ нь $y = \pm\frac{b}{a}x$ чиглүүлэгчүүдийн хоорондох зай төдийчинээ багасана гэсэн үг. Энэ бүхэн гиперболын салааны OX тэнхлэгээс холдох ойртохыг эксцентристет заана гэсэн үг юм (зураг 50).



Зураг 50



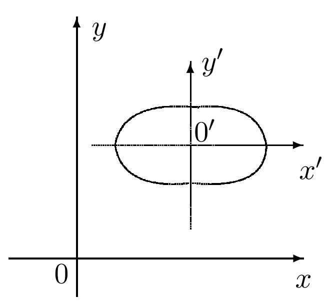
Зураг 51

Эксцентристет өсөхөд гиперболын салаа тэнэгэр болно (зураг 51).

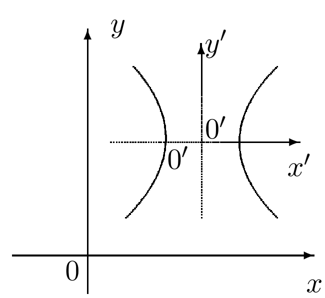
Хэрэв гипербол $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ тэгшитгэлтэй байвал $\varepsilon = \frac{c}{b}$ байна.
Параболын эксцентристет нэгтэй тэнцүү гэж үзнэ.

4.24. Координатын тэнхлэгтэй паралель тэгш хэмийн тэнхлэгүүдтэй эллипс, гипербол парабол

$O'(x_0, y_0)$ цэг дээр төвтэй тэнхлэгүүд нь координатын тэнхлэгүүдтэй параллель эллипсийг авч үзье (зураг 52).



Зураг 52



Зураг 53

XOY системийн эхийг O' цэгт авч тэнхлэгүүдийг параллелиар зөөж

$X'O'Y'$ систем гаргавал шинэ координатын системийн тэнхлэгүүд $O'X'$, $O'Y'$ нь эллипсийн тэгш хэмийн тэнхлэг $O'(x_0, y_0)$ нь эллипсийн төв болно. $X'O'Y'$ системд эллипс нь

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

хялбар тэгшитгэлтэй байна.

Энэ эллипсийн XOY систем дэх тэгшитгэлийг гаргахын тулд координатыг параллель зөөж хувиргах

$$\left.\begin{array}{r} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{array}\right\}$$

томъёог дээрх тэгшитгэлд орлуулбал

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{4.40}$$

гарна. Энэ нь XOY систем дэх эллипсийн тэгшитгэл юм.

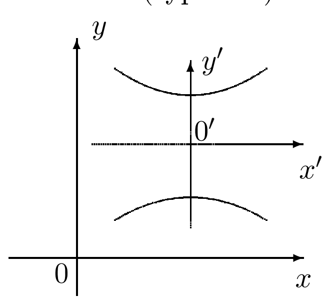
Үүнтэй адилаар $O'(x_0, y_0)$ цэгт төвтэй тэгш хэмийн тэнхлэгүүд нь координатын тэнхлэгүүдтэй параллель гиперболын тэгшитгэлийг гаргана. Бодит тэнхлэг нь OX-тэй параллель $O'(x_0, y_0)$ цэгт төвтэй гипербол нь

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{4.41}$$

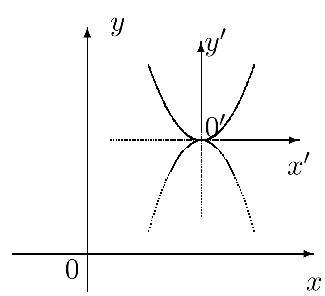
тэгшитгэлтэй байна (зураг 53). Бодит тэнхлэг нь OY-тэй параллель, $O'(x_0, y_0)$ цэгт төвтэй гипербол нь

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_o)^2}{a^2} = 1 \tag{4.42}$$

тэгшитгэлтэй байна (зураг 54).



Зураг 54



Зураг 55

$O'(x_0, y_o)$ цэг дээр оройтой тэгш хэмийн тэнхлэг нь OY тэнхлэгтэй параллель парабол нь

$$y - y_o = a(x - x_0)^2 \tag{4.43}$$

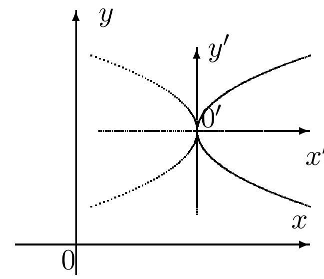
тэгшитгэлтэй (зураг 55).

$O'(x_0, y_0)$ цэг дээр оройтой, тэгш хэмийн тэнхлэг нь OX тэнхлэгтэй параллель парабол нь

$$x - x_o = a(y - y_0)^2 \qquad (4.44)$$

тэгшитгэлтэй (зураг 56).

(4.43), (4.44) тэгшитгэлүүдэд $a = \pm\frac{1}{2p}$, p-параметр байна. Урвуугаар (4.40) – (4.44) тэгшитгэлүүдэд 54-р – 56-р зурагт зурагдсан муруйнууд харгалзана.



Зураг 56

Хэрэв (4.40) – (4.44) тэгшитгэлүүдийн хаалтыг нээж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4.45)$$

хэлбэрийн тэгшитгэл гарна.

(4.45) тэгшитгэл нь (x, y) хоёр хувьсагчтай хоёрдугаар зэргийн алгебрийн

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0 \qquad (4.46)$$

тэгшитгэлийн тухайн тохиолдол байна, ($B = 0$ үеийн).

4.25. Хоёрдугаар эрэмбийн муруйн ерөнхий тэгшитгэлийг xy үржвэр агуулаагүй үед хялбарчлах

(4.46) тэгшитгэлд xy үржвэр байхгүй байна гэе ($B = 0$). Тэгвэл (4.46) нь

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4.47)$$

хэлбэртэй болно. A, C коэффициентуудаас хамааран (4.47) нь янз бүрийн хоёрдугаар эрэмбийн муруйг дүрслэнэ.

1. $AC > 0$, өөрөөр хэлбэл A, C нь ижил тэмдэгтэй. Тодорхой болгохын тулд $A > 0$, $C > 0$ гэе. (4.47)-оос x, y-ын хувьд бүтэн квадрат ялгаж

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = F_1 \qquad (4.48)$$

хэлбэрт шилжүүлнэ.

Хэрэв $F_1 > 0$ бол

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (a^2 = \frac{F_1}{A}, \quad b^2 = \frac{F_1}{C})$$

байна. Энэ тохиолдолд ($AC > 0$) (4.47) тэгшитгэл эллипс дүрслэнэ.

Хэрэв $F_1 < 0$ бол (4.48)-ийг хангах бодит цэг олдохгүй.

Хэрэв $F_1 = 0$ бол (4.48) нь

$$A(x-x_0)^2 + C(y-y_0)^2 = 0$$

болох ба $M_0(x_0, y_0)$ гэсэн нэг цэгийг дүрслэнэ.

2. $AC < 0$, өөрөөр хэлбэл A, C-үүд өөр тэмдэгтэй гэе. Тодорхой болгохын тулд $A > 0,\ C < 0$ гэе. (4.47)-оос x, y-ийн хувьд бүтэн квадрат ялгавал

$$A(x-x_0)^2 - |C|(y-y_0)^2 = F_1 \tag{4.49}$$

гарна.

Хэрэв $F_1 > 0$ бол (4.49) тэгшитгэл нь

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

гэсэн хялбар тэгшитгэл болно. Энэ нь (4.47) тэгшитгэл гиперболыг дүрслэнэ гэдгийг харуулж байна (их тэнхлэг нь OX-тэй паралель).

Хэрэв $F_1 < 0$ бол (4.49) нь

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

гиперболыг дүрсэлж байна (их тэнхлэг нь OY-тэй паралель).

Хэрэв $F_1 = 0$ бол (4.49) нь

$$\begin{aligned} m(x-x_0) - n(y-y_0) = 0 \\ m(x-x_0) + n(y-y_0) = 0 \end{aligned}$$

гэсэн $M_0(x_0, y_0)$ цэгийг дайрсан огтлолцсон хоёр шулууныг дүрслэнэ.

3. $AC = 0$, өөрөөр хэлбэл A, S-ийн аль нэг нь тэгтэй тэнцүү. Тодорхой болгохын тулд $A > 0, \quad C = 0$ гэе. Тэгвэл (4.47) нь

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

хэлбэртэй байна. Эндээс x-ийн хувьд бүтэн квадрат ялгавал (4.47) нь

$$A(x-x_0)^2 + Ey = F_1$$

хэлбэртэй болно.

Хэрэв $E \neq 0$ бол сүүлчийн тэгшитгэлийг

$$y - y_0 = a(x-x_0)^2$$

хэлбэртэй бичиж болно. Энэ нь тэгш хэмийн тэнхлэг нь OY-тэй параллель параболыг дүрслэнэ.

Хэрэв $E = 0$, $F_1 > 0$ бол дээрх тэгшитгэл

$$A(x - x_0)^2 = F_1 \tag{4.50}$$

хэлбэртэй болно. Энэ тэгшитгэлийг

$$\sqrt{A}(x - x_0) + \sqrt{F_1} = 0, \qquad \sqrt{A}(x - x_0) - \sqrt{F_1} = 0$$

гэж бичиж болно. Ингэж (4.50) нь паралель хос шулууныг дүрсэлж байна.

Хэрэв $E = 0$, $F_1 < 0$ бол (4.50)-ийг хангах бодит цэг олдохгүй.

Хэрэв $E = 0$, $F_1 = 0$ бол (4.50) нь

$$A(x - x_0)^2 = 0$$

хэлбэртэй болох ба $(x - x_0) = 0$ гэсэн давхцсан хос шулууныг дүрсэлж байна.

Хэрэв $AC = 0$, тухайлбал $A = 0$, $C \neq 0$ гэвэл (4.47) нь

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

хэлбэртэй байна. Өмнөх тохиолдолтай адилаар $D \neq 0$ бол тэгш хэмийн тэнхлэг нь OX тэнхлэгтэй параллель параболыг дүрслэнэ. Тэгшитгэл нь

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2$$

хэлбэртэй байна.

Хэрэв $D = 0$ бол параллель хос шулуун (тухайн тохиолдолд солбисон), хоосон олонлогийг дүрслэнэ гэдгийг өмнөхтэй адил харуулна.

Ийнхүү (4.47) тэгшитгэл нь эллипс (тойрог), гипербол, парабол, хос шулуун, цэг, хоосон олонлогийг дүрсэлдэг байна.

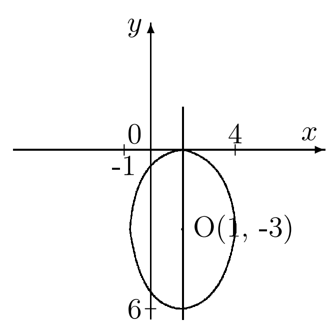
Жишээ 4.11. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$ тэгшитгэлийг хялбарчилж ямар муруй дүрслэхийг тайлбарла, зурж дүрсэл.

Бодолт. $A = 9$, $C = 4$, $AC > 0$ тул эллипслэг муруйг дүрслэх нь ойлгомжтой. x, y-ийн хувьд бүтэн квадрат ялгавал

$$9(x - 1)^2 + 4(y + 3)^2 = 36$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$$

$O(1, -3)$ цэг дээр төвтэй хагас тэнхлэгүүд нь 2, 3 ба фокус нь OY тэнхлэгтэй параллель шулуун дээр байна.



Зураг 57

Жишээ 4.12. $x^2+3y^2-4x-6y+20=0$ тэгшитгэлийг хялбарчилж ямар муруй дүрслэхийг тогтоо.

Бодолт. $AC=3>0$ тул эллипслэг муруй дүрслэх боломжтой. x, y-ийн хувьд бүтэн квадрат ялгавал

$$(x-2)^2+3(y-1)^2=-20+4+3=-13<0$$

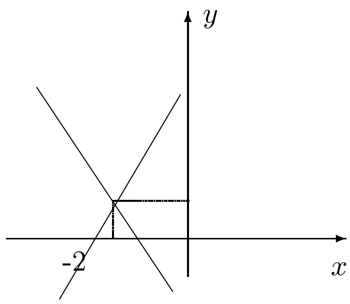
энэ тэгшитгэлийг хангах цэгүүдийн олонлог нь хоосон олонлог байна. Өгсөн тэгшитгэл ямар ч бодит муруйг дүрслэхгүй.

Жишээ 4.13. $4x^2-y^2+16x+2y+15=0$ тэгшитгэлийг хялбарчилж ямар муруй дүрслэхийг тогтоож зур.

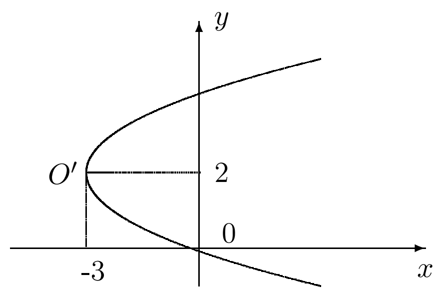
Бодолт. $AC=-4<0$ учраас энэ өгсөн тэгшитгэл нь гиперболлог маягийн муруйг дүрслэнэ. x, y-ийн хувьд бүтэн квадрат ялгавал

$$4(x+2)^2-(y-1)^2=-15+16-1=0$$

$\begin{array}{l}2(x+2)-(y-1)=0\\2(x+2)+(y-1)=0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}2x-y+5=0\\2x+y+3=0\end{array}$ болно. Энэ нь OXY системд $O'(-2,1)$ цэгт огтлолцсон хоёр шулууныг дүрслэнэ (зураг 58).



Зураг 58



Зураг 59

Жишээ 4.14. $y^2-4x-4y-8=0$ тэгшитгэл ямар муруй дүрслэхийг тогтоож зур.

Бодолт. $A=0, C\neq 0$ үед параболлог муруйг дүрслэнэ. $y^2-4x-4y-8=0$ тэгшитгэлийг

$$(y-2)^2-4x-12=0 \text{ буюу } (y-2)^2=4(x+3)$$

гэж бичнэ. Энэ нь $(-3,2)$ цэг дээр оройтой, тэгш хэмийн тэнхлэг нь OX тэнхлэгтэй параллель шулуун байх параболыг дүрслэнэ (зураг 59).

4.26. Эллиписоид

Тодорхойлолт. *$OXYZ$ системд*

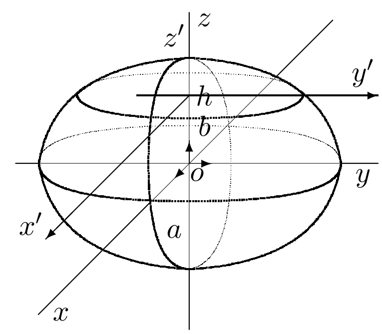
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.51}$$

тэгшитгэлтэй гадаргууг эллипсоид гэнэ.

Огтлолын аргаар эллипсоидын хэлбэрийг шинжилье. Эллипсоидыг $z = h$ хавтгайгаар огтлоход огтлолд нь

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \end{array}\right\}$$

шугам үүснэ. $z = h$ хавтгай дээр координатын $X'O'Y'$ системд огтлолд үүссэн шугам нь



Зураг 60

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \tag{4.52}$$

гэсэн эллипс байна.

Хэрэв $|h| < c$ бол (4.52) тэгшитгэл нь эллипсийг тодорхойлно.
$|h| = c$ бол (4.52) нь цэгийг дүрслэнэ. Хэрэв $|h| > c$ бол (4.52)-г хангах бодит цэг олдохгүй. Хэрэв $h = 0$ бол (4.52) нь хагас тэнхлэгүүд нь a, b байх эллипсийг дүрслэнэ.

Үүнтэй адилаар $y = m$, $x = n$ хавтгайнуудаар огтлоход огтлолд бас эллипс үүсэхийг харуулж болно.

Тодорхойлолт. *a, b, c тоонуудыг эллипсоидын хагас тэнхлэгүүд гэнэ. Хэрэв хоёр хагас тэнхлэг нь тэнцүү бол эллипсоидын аль нэг тэнхлэгийг эллипс тойрч эргэхэд үүсэх эргэлтийн эллипсоид гэнэ.* Жишээлбэл: Хэрэв $a = b$ бол (4.51) нь $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ болох ба энэ гадаргуур $z = h$ хавтгайгаар огтлоход огтлолд нь

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a^2(1 - \frac{z^2}{c^2}) \\ z = h \end{array}\right\}$$

шугам үүснэ. $z = h$ хавтгай дээр $X'O'Y'$ системд $x'^2 + y'^2 = a^2(1 - \frac{h^2}{c^2})$, $|h| < c$ тойрог үүсч байна. Энэ үед эллипсоид нь $x^2 + y^2 = a^2$ тойрог OZ тэнхлэгийг тойрч эргэхэд үүссэн байна.

Хэрэв $a = b = c$ бол (4.51) тэгшитгэл нь бөмбөлөг гадаргууг дүрслэнэ.

4.27. Гиперболоидууд

§ 4.27.1. Нэг хөндийт гиперболоид

Тодорхойлолт. *$OXYZ$ системд*

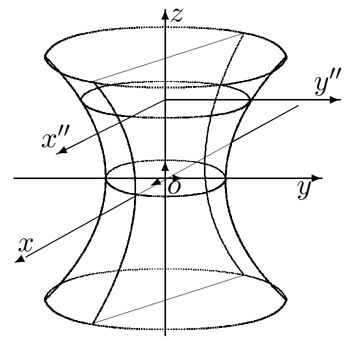
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.53}$$

тэгшитгэлтэй гадаргууг нэг хөндийт гиперболоид гэнэ.

Нэг хөндийт гиперболоидыг $z = h$ хавтгайгаар огтлоход огтлолын хавтгай дээр орших $O'X'Y'$ системд

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

гэсэн эллипс үүснэ. $h = 0$ бол координатын XOY хавтгай дээр a, b хагас тэнхлэгтэй эллипс үүснэ. $|h|$ өсөхөд огтлолд үүсэх эллипсийн хагас тэнхлэгүүд өснө (зураг 61).



Зураг 61

Нэг хөндийт гиперболоидыг $|m| < b$, $b > 0$ байх $y = m$ хавтгайгаар огтлоход огтлолын хавтгай дээр $O''(0, m, 0)$ цэг дээр төвтэй $O''X''$, $O''Z''$ гэсэн тэнхлэгүүд нь OX, OZ тэнхлэгүүдтэй ижил чиглэлтэй байх координатын $O''X''Y''$ системд

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{b^2} \tag{4.54}$$

гэсэн гипербол үүснэ. Энэ гиперболын орой нь $O''X''$ тэнхлэг дээр байна. $|m| = b$, $b > 0$ бол (4.54) нь огтлолцсон $\frac{x''}{a} - \frac{z''}{c} = 0$, $\frac{x''}{a} + \frac{z''}{c} = 0$ гэсэн хоёр шулууныг дүрслэнэ. $|m| > b$, $b > 0$ бол (4.54) тэгшитгэл нь оройнууд нь $O''Z''$ тэнхлэг дээр орших гиперболыг дүрслэнэ.

Үүнтэй адилаар нэг хөндийт гиперболоидыг $x = h$ хавтгайгаар огтолж огтлолд нь огтлолцсон хоёр шулуун, $O''Y''$ тэнхлэг дээр оройнууд нь орших гипербол үүсэхийг харуулж болно. (4.53) тэгшитгэлтэй нэг хөндийт гиперболоидыг (зураг 61) дүрслэв.

Тодорхойлолт. *Хэрэв $a = b$ бол*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тэгшитгэлтэй нэг хөндийт гиперболоидыг эргэлтийн гиперболоид гэнэ. Энэ нь гипербол хуурмаг тэнхлэгээ тойрч эргэхэд үүссэн байна.

$OXYZ$ системд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тэгшитгэлтэй гадаргуунууд нь нэг хөндийт гиперболоид байна. (4.53) тэгшитгэлтэй гиперболоидтой яг адилхан хэлбэртэй зөвхөн координатын систем дэх байрлал нь өөр өөр байх юм.

§ 4.27.2. Хоёр хөндийт гиперболоид

Тодорхойлолт. *$OXYZ$ системд*

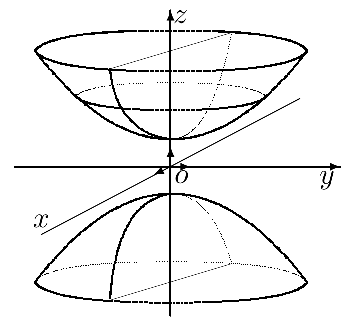
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{4.55}$$

тэгшитгэлтэй гадаргууг хоёр хөндийт гиперболоид гэнэ.

Хоёр хөндийт гиперболоидыг $z = h$, $|h| > c$ хавтгайгаар огтлоход огтлолд нь эллипс үүсэх ба $|h| < c$ бол огтлолд нь хоосон олонлог үүснэ. Хоёр хөндийт гиперболоидыг (зураг 62) дүрслэв.

$y = n$, $x = m$ хавтгайгаар огтлоход огтлолд гиперболоидууд үүснэ. $a = b$ бол гипербол бодит тэнхлэгээ тойрч эргэхэд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Зураг 62

тэгшитгэлтэй эргэлтийн хоёр хөндийт гиперболоид үүснэ.

$OXYZ$ системд

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

тэгшитгэлтэй гадаргуунууд нь хоёр хөндийт гиперболоид байх ба (4.55) тэгшитгэлтэй хоёр хөндийт гиперболоидтой яг адилхан хэлбэртэй, зөвхөн координатын систем дахь байрлал нь өөр өөр байна.

4.28. Параболоидууд

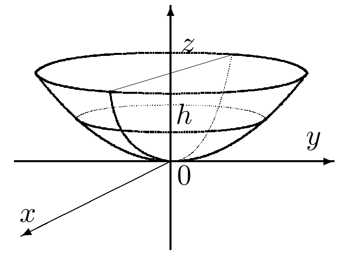
§ 4.28.1. Эллипслэг параболоид

Тодорхойлолт. *$OXYZ$ системд*

$$z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (pq > 0) \tag{4.56}$$

тэгшитгэлтэй гадаргууг эллипслэг параболоид гэнэ.

$z = h$ хавтгайгаар огтлоход огтлолд нь эллипс үүснэ. Харин $x = m$ $y = n$ хавтгайгаар огтлоход параболууд үүснэ.
63-р зурагт $p > 0$, $q > 0$ тохиолдолд дүрслэв. $q = p$ бол эллипслэг параболоидыг парабол тэгш хэмийн тэнхлэгээ тойрч эргэх эргэлтийн параболоид гэнэ. $OXYZ$ системд



Зураг 63

$$y = \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} \quad (pq > 0)$$

$$x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} \quad (pq > 0)$$

тэгшитгэлтэй гадаргуунууд нь эллипслэг параболоидууд байна.

Хэлбэр нь (4.56) тэгшитгэлтэй эллипслэг параболоидтай адилхан харин координатын системд байрлал нь өөр өөр байна (тэгш хэмийн тэнхлэг нь OY, OX байна).

§ 4.28.2. Гиперболлог параболоид

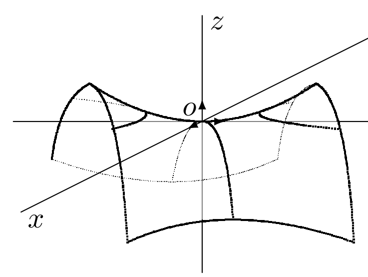
Тодорхойлолт. *$OXYZ$ системд*

$$z = -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (pq > 0) \tag{4.57}$$

тэгшитгэлтэй гадаргууг гиперболлог параболоид гэнэ.

$p > 0$, $q > 0$ үед $x = h$ хавтгайгаар гиперболлог параболоидыг огтолъё. Огтлолын хавтгай дээр $O'(h, 0, 0)$ цэг дээр эхтэй $O'X'Y'$ систем авъя. $O'Y'$, $O'Z'$ тэнхлэгүүд нь OY, OZ тэнхлэгүүдтэй (харгалзан) ижил чиглэлтэй. $O'Y'Z'$ системд

$$z' = \frac{y'^2}{q} - \frac{h^2}{p} \tag{4.58}$$



Зураг 64

тэгшитгэлтэй огтлолын шугам үүснэ. h-ийн дурын утганд (4.58) тэгшитгэл нь параболыг дүрслэнэ. Хэрэв $h = 0$ бол координатын эх дээр оройтой, OZ тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй салаа нь дээшээ харсан парабол байна.

Гиперболлог параболоидыг $y = m$ хавтгайгаар огтлоход $O''X''Z''$ системд огтлолын шугам нь

$$z'' = \frac{m^2}{q} - \frac{x''^2}{p}$$

тэгшитгэлтэй байна. Энэ тэгшитгэл нь m-ийн дурын утганд $O''Z''$ тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй параболыг дүрслэнэ. Энэ параболын орой нь OYZ хавтгайд орших $z = \frac{y^2}{b^2}$ парабол дээр байна. Энэ параболын салаа нь доош харсан байна. (4.57) тэгшитгэлтэй гиперболлог параболоидыг $z = h$ $(h \neq 0)$ хавтгайгаар огтлоход гипербол үүснэ. $z = 0$ хавтгайгаар огтлоход огтлолцсон 2 шулуун үүснэ. (4.57) тэгшитгэлтэй гиперболлог параболоидыг 64-р зурагт дүрслэв.

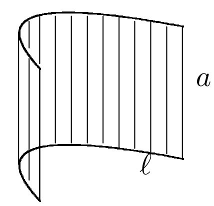
$OXYZ$ системд

$$x = -\frac{z^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (pq > 0), \qquad y = -\frac{z^2}{p} + \frac{x^2}{q} \quad (pq > 0)$$

тэгшитгэлтэй гадаргуунууд нь мөн гиперболлог параболоид байна. (4.57) тэгшитгэлтэй гиперболлог параболоидтой хэлбэрээрээ адил координатын систем дэх байрлал нь өөр өөр байна.

4.29. Цилиндр гадаргуу

Тодорхойлолт. *Ямар нэг ℓ муруйн дагуу a шулуун параллелиар шилжихэд байгуулагдах гадаргууг цилиндр гадаргуу гэнэ. a-шулууныг байгуулагч, ℓ муруйг чиглүүлэгч гэнэ.*



Зураг 65

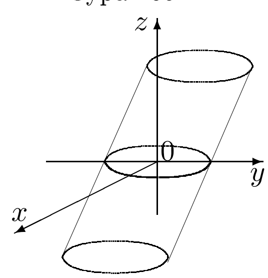
Чиглүүлэгч ℓ муруй, байгуулагч a шулуун өгснөөр цилиндр гадаргуу өгөгдлөө гэж үздэг.

$OXYZ$ системд цилиндрийн байгуулагч нь

$$\frac{X - x}{m} = \frac{Y - y}{n} = \frac{Z - z}{p} \tag{4.59}$$

тэгшитгэлтэй чиглүүлэгч нь

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{array}\right\} \tag{4.60}$$



Зураг 66

тэгшитгэлтэй гэе. Энд X, Y, Z нь байгуулагчийн дурын цэгийн координат, $M(x, y, z)$ цэгүүд нь чиглүүлэгч дээр хэвтэх ба байгуулагч түүнийг дайрч гарах цэг. (4.59), (4.60) тэгшитгэлүүдээс (x, y, z)-г зайлуулбал цилиндр гадаргуу дээр орших (X, Y, Z) координаттай цэг хангах

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

тэгшитгэл гарна. Энэ тэгшитгэлээр дүрслэгдэх гадаргуу нь цилиндр гадаргуу байна.

Жишээ 4.15.
$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1} \tag{4.61}$$
байгуулагчтай.
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \tag{4.62}$$
чиглүүлэгчтэй цилиндр гадаргуугийн тэгшитгэл бич.

Бодолт. (4.61) тэгшитгэлээс
$$X-x=Z-z, \quad Y-y=Z-z$$
$$x=X-Z+z, \quad y=Y-Z+z$$
гэж x, y-ийг олж (4.62) тэгшитгэлд орлуулбал
$$(X-Z)^2+(Y-Z)^2=1$$
болно. Энэ нь бидний олох цилиндрийн тэгшитгэл (зураг 3.62).

Жишээ 4.16. Байгуулагч ба чиглүүлэгч нь харгалзан
$$AX+BY+C=0, \quad Z=z$$
$$y=kz^2 \qquad x=0 \tag{4.63}$$
тэгшитгэлтэй байх цилиндр гадаргуугийн тэгшитгэл бич.

Бодолт. Байгуулагч шулууны чиглүүлэгч вектор
$$\mathbf{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=B_i-A_j \ \Rightarrow \ \mathbf{s}(B,-A,0)$$
байна. Иймд байгуулагч шулуун нь
$$\frac{X-x}{B}=\frac{Y-y}{-A}=\frac{Z-z}{0} \tag{4.64}$$
тэгшитгэлтэй болно. Энд байгаа (x, y, z) нь байгуулагч дайрч гарах чиглүүлэгч дээрх цэгийн координатууд. (4.64)-өөс
$$Z=z, \quad y=Y+\frac{A}{B}(X-x)$$
олж (4.63) тэгшитгэлд орлуулбал
$$Y+\frac{A}{B}(X-x)=kZ^2, \quad x=0 \ \Rightarrow \ Y+\frac{A}{B}X=kZ^2$$
$$AX+BY+DZ^2=0 \tag{4.65}$$
Энд $D=-kB$. Энэ (4.65) нь бидний олох цилиндрийн тэгшитгэл болно.

4.30. Координатын аль нэг тэнхлэгтэй параллель байгуулагчтай цилиндр гадаргуу

$OXYZ$ системд байгуулагч нь

$$\frac{X-x}{0}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1}$$

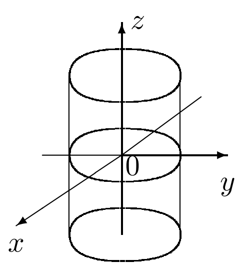
тэгшитгэлтэй өөрөөр хэлбэл OZ тэнхлэгтэй параллель, чиглүүлэгч нь

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$$

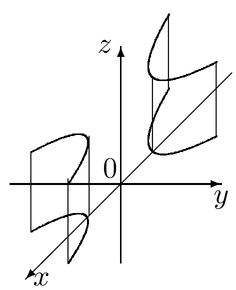
байх цилиндр гадаргуу нь $F(X,Y)=0$ тэгшитгэлтэй байна. Үүнийг гаргахдаа өгсөн тэгшитгэлүүдээс x,y,z-г зайлуулна.

Координат нь $F(x,y)=0$ тэгшитгэлийг хангах огторгуйн цэгүүдийн олонлог бүхэн цилиндр гадаргууг дүрслэх албагүй. Жишээлбэл: Огторгуйд $x^2+y^2+2=0$ тэгшитгэлийг хангах бодит цэгүүд олдохгүй тул хоосон олонлогийг дүрслэнэ. Ямар ч цилиндрийг дүрслэхгүй.

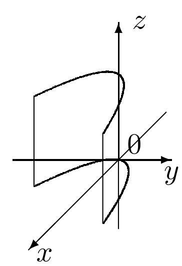
Хэрэв XOY хавтгай дээр $F(x,y)=0$ тэгшитгэлд ямар нэг ℓ муруй харгалздаг бол энэ тэгшитгэл нь огторгуйд ℓ чиглүүлэгчтэй, OZ тэнхлэгтэй паралель байгуулагчтай цилиндрийг дүрслэнэ. Жишээлбэл $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ тэгшитгэл нь $OXYZ$ системд эллипслэг цилиндрийг дүрслэнэ (зураг 67). $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ нь гиперболлог цилиндр (зураг 68). $y^2=2px \ \ (p>0)$ тэгшитгэл нь параболлог цилиндр дүрслэнэ (зураг 69).



Зураг 67



Зураг 68

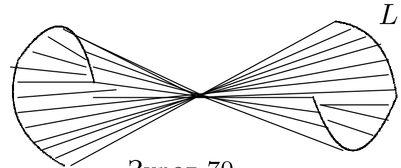


Зураг 69

Үүнтэй адилаар чиглүүлэгч нь $YOZ(XOZ)$ хавтгай дээр $F(y,z)=0$, $(F(x,z)=0)$ тэгшитгэлтэй бол энэ тэгшитгэл нь огторгуйд OX (OY) тэнхлэгтэй параллель байгуулагч бүхий цилиндр гадаргууг дүрслэнэ.

4.31. Конус гадаргуу

Тодорхойлолт. *Нэг үл хөдлөх цэгтэй шулуун ямар нэг ℓ муруйн дагуу шилжихэд үүсэх гадаргууг (конус) конус гадаргуу гэнэ. Энэ шилжиж* *байгаа шулууныг байгуулагч, ℓ муруйг чиглүүлэгч, үл хөдлөх цэгийг оройн цэг гэнэ (зураг 70).*



Зураг 70

Чиглүүлэгч ба оройн цэг мэдэгдсэнээр конус гадаргуу бүрэн тодорхойлогдоно. $OXYZ$ системд конусын чиглүүлэгч ℓ нь

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \tag{4.66}$$

тэгшитгэлтэй, орой нь $M_0(x_0,y_0,z_0)$ цэг гэе. Чиглүүлэгч ℓ дээр орших (x,y,z) цэгүүдийг байгуулагч дайран гарах тул байгуулагч нь

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0} \tag{4.67}$$

тэгшитгэлтэй байна. (4.66), (4.67)-аас x,y,z-ийг зайлуулбал $\varphi(X,Y,Z)=0$ тэгшитгэл гарна. Энэ нь конусын тэгшитгэл болно.

Жишээ 4.17. Оройн нь координатын эх, чиглүүлэгч нь

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c\neq 0 \end{array}\right. \tag{4.68}$$

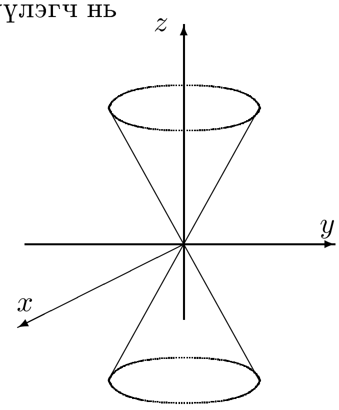
тэгшитгэлтэй байх конусын тэгшитгэлийг бич.

Бодолт. Байгуулагчийн тэгшитгэлийг бичвэл

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z} \tag{4.69}$$

болно. (4.68), (4.69)-аас x,y,z-ийг зайлуулбал

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$



Зураг 71

болно. (X,Y,Z) нь конусын байгуулагчийн дурын цэг учраас сүүлчийн гарсан тэгшитгэл нь конусын тэгшитгэл болно (зураг 71).

4.32. Эргэлтийн гадаргуу

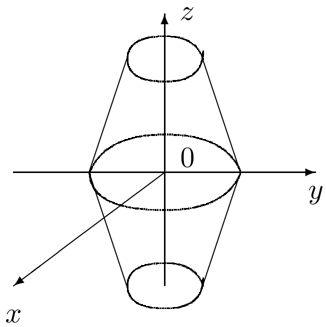
Тодорхойлолт. *Хавтгайн ямар нэг ℓ шугам түүнтэй нэг хавтгай дээр орших шулууныг тойрч эргэхэд үүсэх гадаргууг эргэлтийн гадаргуу гэнэ (зураг 72).*

$OXYZ$ системийн OYZ хавтгай дээр

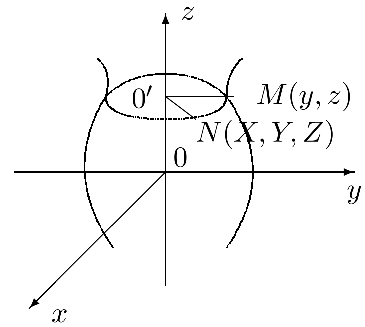
$$F(y,z)=0 \tag{4.70}$$

тэгшитгэлтэй ℓ шугам OZ тэнхлэгийг тойрч эргэхэд үүсэх эргэлтийн гадаргуугийн тэгшитгэлийг бичье.

ℓ шугам дээр $M(y,z)$ цэг авъя. Эргэлтийн хавтгай OYZ нь OZ тэнхлэгийг тойрч эргэхэд $M(y,z)$ цэг нь тойрог зурна (зураг 73). $N(X,Y,Z)$ нь тойргийн дурын цэг гэе.



Зураг 72



Зураг 73

Тэгвэл

$$Z = z, \quad |y| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$y = \pm\sqrt{X^2 + Y^2} \quad z = Z$$

Энэ y, z-г (4.70)-д орлуулбал

$$F(\pm\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) = 0$$

болно. Энэ тэгшитгэл нь авч үзэж байгаа эргэлтийн гадаргуугийн тэгшитгэл болно. Жишээлбэл OYZ хавтгайд

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тэгшитгэлтэй эллипс OZ тэнхлэгийг тойрч эргэхэд үүсэх эргэлтийн гадаргуугийн тэгшитгэл нь

$$\frac{(\pm\sqrt{X^2 + Y^2})^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{X^2 + Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

болно. Энэ нь эргэлтийн эллипсоидын тэгшитгэл.

4.33. Дасгал ба бодлогууд

№1. M цэгийг дайрсан $\overrightarrow{M_1M_2}$-д перпендикуляр шулууны тэгшитгэлийг бич.

а) $M(3;4)$, $M_1(0;-2)$, $M_2(3;5)$

б) $M(-1;2)$, $M_1(3;3)$, $M_2(4;3)$.

№2. $M(-1;2)$ цэгийг дайрсан OX тэнхлэгтэй $\frac{\pi}{4}$ өнцөг үүсгэх шулууны тэгшитгэлийг бич.

№3. Координатын тэнхлэгүүд ба $2x+3y-6=0$ шулуунаар байгуулсан гурвалжны талбайг ол.

№4. **a**-ийн ямар утганд $(a^2-4)x+(2a+1)y+a-8=0$ шулуун

а) OX тэнхлэгтэй параллель

б) OY тэнхлэгтэй параллель

в) координатын эхийг дайрсан байх вэ?

№5. **а)** $M_1(-2;-3)$, $M_2(0;-4)$ **б)** $M_1(2;0)$, $M_2(-5;3)$, **в)** $M_1(1;5)$, $M_2(0;0)$, **г)** $M_1(-4;1)$, $M_2(5;-3)$ цэгүүдийг дайрсан шулууны тэгшитгэл бичиж өнцгийн коэффициентийг ол.

№6. $M_1(4;-3)$, $M_2(0;1)$ цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бич.

№7. $3x-2y+4=0$ шулууны OY тэнхлэгтэй огтлолцсон цэг ба $M(5;0)$ цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл бич.

№8. $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$ оройтой гурвалжин өгсөн байг.

а) Гурвалжны талуудын, өндрүүдийн, медиануудын, биссектрисүүдийн, дундаж шугамуудын тэгшитгэлийг бич.

б) Биссектрис, медиан, өндрийн уртыг ол.

в) Багтсан ба багтаасан тойргийн тэгшитгэл бич.

г) Гурвалжны талбайг ол.

№9. $M(1;-1)$ цэгт төвтэй $R=2$ радиустай тойргийн вектор хэлбэртэй ба координатын хэлбэртэй тэгшитгэл бич.

№10. $M(2;3)$ цэгийг дайрсан $\mathbf{s}(-2;4)$ вектортэй параллель шулууны тэгшитгэл бич.

№11. M цэгийг дайрсан $\mathbf{s}$ вектортой параллель шулууны тэгшитгэлийг бич.

а) $M(4;-5)$, $\mathbf{s}(3;2)$ **б)** $M(2;1)$, $\mathbf{s}(0;4)$

в) $M(3;-1)$, $\mathbf{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $M_1(0;1)$, $M_2(-3;3)$.

№12. **а)** $M(-1;1)$ цэгийг дайрсан OX тэнхлэгтэй параллель, **б)** $M(5;4)$ цэгийг дайрсан OY тэнхлэгтэй параллель шулууны тэгшитгэлийг бич.

№13. M цэгийг дайрсан $\mathbf{n}(4;-5)$ векторт перендикуляр байх шулууны вектор ба координатын хэлбэртэй тэгшитгэл бич.

а) $M(-3;-2)$ **б)** $M(0;1)$, **в)** $M(0,5;-1)$,
г) $M(0;0)$, **д)** $M(-5;-4)$, **е)** $M(-1;0,5)$.

№14. $A(3;2)$, $B(-2;-1)$, $C(4;-2)$ оройтой гурвалжны

а) дотоод, гадаад өнцгүүдийг ол.

б) гурвалжны гадаад, дотоод өнцгүүдийн биссектрисийн тэгшитгэл бич.

в) B оройгоос буулгасан өндрийн уртыг ол.

г) C оройгоос буулгасан өндрийн уртыг ол.

д) оройнуудын аль нэгийг дайрсан ба тэр оройн эсрэг орших талтай параллель шулууны (3 шулуун) тэгшитгэл бич.

№15. $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(0;-4)$ оройтой гурвалжны багтсан ба багтаасан тойргийн тэгшитгэл бич.

№16. **а)** $M(-1;2)$ цэгийг дайрсан $2x+3y-1=0$ шулуунтай параллель, **б)** $M(4;1)$ цэгийг дайрсан $x-y+2=0$ шулуунд перпендикуляр шулууны тэгшитгэлийг бич.

№17. **а)** $M(-1;-2)$ цэгийг дайрсан $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}$ шулуунтай параллель, **б)** $M(0;3)$ цэгийг дайрсан $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}$ шулуунд перпендикуляр шулууны тэгшитгэл бич.

№18. $M(2,-1)$ цэгийг дайрсан

а) $3x-5y-7=0$ шулуунд перпендикуляр

б) $3x-5y-7=0$ шулуунтай параллель шулууны тэгшитгэл бич.

№19. $M(-1;3)$ цэгийг дайрсан

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}$ шулуунд перпендикуляр

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}$ шулуунтай параллель шулууны тэгшитгэл бич.

№20. $M(-1;-5)$ цэгийн $4x+7y-26=0$ шулуун дээрх проекцыг ол.

№21. $C(0;0;0)$ цэг дээр төвтэй, 3 радиустай **а)** OZ тэнхлэгтэй, **б)** OX тэнхлэгтэй, **в)** OY тэнхлэгтэй параллель байгуулагчтай цилиндрийн тэгшитгэл бич.

№22. Дараах шулуунуудын хоорондох өнцгийг ол.

а) $3x-y+5=0$ ба $x-y+1=0$

б) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}$ ба $\frac{x+2}{7}=\frac{y}{4}$

в) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+4}{5}$ ба $2x+3y-1=0$.

№23. $M(2;-5)$ цэгээс $4x-3y+25=0$ шулуун хүртэлх зайг ол.

№24. $x-12y+52=0$, $16x-24y-39=0$ шулуунуудын хоорондох зайг ол.

№25. $M(a;b;6)$ цэг дээр төвтэй R радиустай бөмбөлгийн вектор ба координатын хэлбэртэй тэгшитгэлийг бич.

№26. $M(2;-1;3)$ цэгийг дайрсан $\mathbf{n}(4;2;-5)$ векторт перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэлийг бич.

№27. $M(4;-3;0)$ цэгийг дайрсан $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторт перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэл бич. Энд $M_1(2;-2;1)$, $M_2(3;0;-2)$.

№28. Дараах тэгшитгэлтэй хавтгайнуудыг координатын системд байгуул.
а) $2x+3y+z=0$, **б)** $3y-z=0$, **в)** $2x+3z-5=0$, **г)** $y-5=0$.

№29. M цэгийг дайрсан $\mathbf{s_1}$ ба $\mathbf{s_2}$ векторуудтай параллель хавтгайн тэгшитгэлийг бич.
а) $M(3;1;-1)$, $\mathbf{s_1}(-1;0;2)$, $\mathbf{s_2}(3;-1;1)$
б) $M(2;-2;0)$, $\mathbf{s_1}(3;-4;1)$, $\mathbf{s_2}(0;-2;0)$
в) $M(4;3;-2)$, $\mathbf{s_1}(0;0;-2)$, $\mathbf{s_2}(0;5;0)$.

№30. M цэгийг дайрсан $\mathbf{s}$ вектортой паралель шулууны тэгшитгэл бич.
а) $M(2;0;1)$, $\mathbf{s}(3;-1;1)$ **б)** $M(-3;2;-2)$ $\mathbf{s}(0;1;-1)$.

№31. $M(3;-4;1)$ цэгийг дайран гарах дараах шулууны тэгшитгэл бич.
а) OZ тэнхлэгтэй параллель
б) $2x+3y-7=0$ хавтгайд перпендикуляр
в) OXY хавтгайд перпендикуляр.

№32. Дараах шулууны хялбар тэгшитгэлийг бич.
а) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=7t \\ z=3t+1 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=2t-5 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x-y+z+1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$

№33. M_1, M_2 цэгүүдийг дайрсан шулууны тэгшитгэл бич.
а) $M_1(1;-2;1)$, $M_2(3;4;-7)$
б) $M_1(-1;0;1)$, M_2 нь $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=2-t \end{cases}$ шулуун, $x+2y-z-3=0$ хавтгайн огтлолын цэг.
в) $M_1(0;0;0)$, M_2 нь $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{1}$ шулууны $2x-3y+z-13=0$ хавтгайтай огтлолцох цэг.
г) $M_1(1;1;1)$, M_2 нь $\begin{cases} 2x-y+10z-1=0 \\ 3x+4y+z-7=0 \end{cases}$ шулууны XOY хавтгайтай огтлолцсон цэг.

№34. $M_1(3;-1;2)$, $M_2(-2;0;1)$, $M_3(1;1;0)$ цэгүүдийг дайрсан хавтгайн тэгшитгэлийг бич.

№35. $M(3;2;1)$ цэг ба $x+3y-2z-6=0$ хавтгайн OX, OY тэнхлэгүүдтэй огтлолцсон цэгүүдийг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл бич.

№36. M_1, M_2, M_3, M_4 цэгүүд нэг хавтгай дээр орших эсэхийг шалга.
а) $M_1(3;0;0)$, $M_2(4;-2;1)$, $M_3(0;1;0)$, $M_4(-2;1;0)$
б) $M_1(0;0;0)$, $M_2(1;-2;3)$, $M_3(2;-1;-2)$, $M_4(3;-3;1)$.

№37. $M(-1;0;2)$ цэгийг дайрсан $2x+3y-z=0$ хавтгайтай параллель хавтгайн тэгшитгэл бич.

№38. $M_1(2;-1;0)$, $M_2(1;-3;2)$ цэгүүдийг дайрсан $x+y+z-1=0$ хавтгайд перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэл бич.

№39. $M(-3;1;2)$ цэгийг дайрсан бөгөөд $2x+3y-z-4=0$, $3x-4y+7z-1=0$ хавтгайнуудад перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэл бич.

№40. $M_1(2;-1;3)$, $M_2(-4;0;5)$ цэгүүдийг дайрсан OYZ хавтгайд перпендикуляр хавтгайн тэгшитгэл бич.

№41. $M(-1;2;3)$ цэгийг дайрсан $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$ шулуунтай параллель шулууны тэгшитгэл бич.

№42. $M(2;0;-3)$ цэгийг дайрсан $\begin{cases} 2x-3y+z+1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ шулуунтай параллель шулууны тэгшитгэл бич.

№43. $M(1;2;0)$ цэгийг дайрсан $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+2 \\ z=t-1 \end{cases}$ ба $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t-2 \\ z=-5t+1 \end{cases}$ шулуунуудад перпендикуляр шулууны тэгшитгэл бич.

№44. Дараах огторгуйн шулуунуудын хоорондох өнцгийг ол.

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{3}$ ба $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{-1}$

б) $\begin{cases} 2x-3y+z+1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ ба OZ тэнхлэг.

в) $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=3t-4 \\ z=8t+1 \end{cases}$ ба $\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ 2x-y+z+5=0 \end{cases}$

№45. $M_1(\mathbf{r_1})$, $M_2(\mathbf{r_2})$, $M_3(\mathbf{r_3})$ гурван цэгийг агуулсан хавтгайн вектор хэлбэртэй тэгшитгэл бич. $\mathbf{r_1}(x_1;y_1;z_1)$, $\mathbf{r_2}(x_2;y_2;z_2)$, $\mathbf{r_3}(x_3;y_3;z_3)$ координаттай нөхцөлд энэ хавтгайн координатын хэлбэртэй тэгшитгэл бич.

№46. $M_0(\mathbf{r_0})$ цэгийг агуулсан бөгөөд $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ векторуудтай параллель хавтгайн тэгшитгэл бич.

№47. $M_1(\mathbf{r_1})$ цэгийг агуулсан $\mathbf{r}=\mathbf{r_0}-\mathbf{a}t$ шулуун перендикуляр байх хавтгайн вектор хэлбэртэй тэгшитгэл бич.

№48. Дараах шулуун ба хавтгайн хоорондох өнцгийг ол.

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{5}$, $2x+3y-5z-1=0$

б) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t+5 \\ z=-4t-1 \end{cases}$, $3x+4y-2z=0$

в) $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$, $5x-y-z+2=0.$

№49. $M(0;3;10)$ цэгийг дайрсан $x-y+2z-4=0$ хавтгайд перпендикуляр шулууны тэгшитгэл бич.

№50. $M(1;-4;3)$ цэгийн $2x-y-z-1=0$ хавтгай дээрх проекцыг ол.

№51. $M(-1;-3;2)$ цэгтэй $2x+3y-z-1=0$ хавтгайн хувьд тэгш хэмтэй байх цэгийг ол.

№52. $M(-1;5;8)$ цэгийг дайрсан $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z}{4}$ шулуунд перпендикуляр байх хавтгайн тэгшитгэл бич.

№53. $M_1(2;0;-4)$, $M_2(0;3;5)$ цэгүүдийг дайрсан $\frac{x-4}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+5}{0}$ шулуунд параллель хавтгайн тэгшитгэл бич.

№54. $M_0(\mathbf{r_0})$ цэгийг агуулсан ба $\mathbf{rn_1}+D_1=0$, $\mathbf{rn_2}+D_2=0$ хавтгайнуудтай параллель шулууны параметртэй вектор ба координатын хэлбэртэй хялбар тэгшитгэл бич $\mathbf{r_0}(x_0;y_0;z_0)$, $\mathbf{n_1}(A_1;B_1;C_1)$, $\mathbf{n_2}(A_2;B_2;C_2)$.

№55. $M(-1;5;8)$ цэгийг дайрсан OZ тэнхлэгт перпендикуляр хавтгайн тэшшитгэл бич.

№56. **а)** $M(-1;3;2)$ цэгээс $2x-3y+z=0$ хавтгай, **б)** координатын эхээс $x+y-z+5=0$ хавтгай хүрэх зайг ол.

№57. $M_1(3;0;1)$, $M_2(-1;2;0)$, $M_3(0;0;-1)$, $M_4(2;3;1)$ оройтой пирамид өгчээ. M_1 оройгоос $M_2M_3M_4$ талст буулгасан өндрийг ол.

№58. $2x-y+3z-5=0$, $4x-2y+6z+3=0$ хавтгайнуудын хоорондох зайг ол.

№59. $3x+y-2z-5=0$ хавтгайн хувьд $M(1;-2;5)$ цэгтэй тэгш хэмтэй байх N цэгийг ол.

№60. $M_1(2;-1;3)$, $M_2(2;1;3)$ цэгүүдийг дайрсан бөгөөд $\mathbf{a}(3;-1;4)$ вектортэй параллель хавтгайн тэгшитгэл бич.

№61. 1) $2x-3y+5z-7=0$, 2) $4x+2y-4z+5=0$,
3) $4x-6y+10z+3=0$, 4) $2x+y+2z-1=0$,
5) $x-3z+2=0$, 6) $2x-5z-7=0$
хавтгайнуудын **а)** параллель, перпендикуляр эсэхийг тогтоох,
б) координатын системд байрлалыг зурах,
в) координатын эхээс эдгээр хавтгай хүрэх зайг ол.

№62. Хавтгайнуудын хоорондох өнцгийг ол.
а) $x+3y-5z+1=0$, $3x-5y+z-2=0$
б) $3x-5z=0$, $y+1=0$
в) $5x-y+2z+1=0$ ба OYZ.

№63. $M_1(0;0;0)$, $M_2(1;-2;3)$, $M_3(2;-1;-2)$, $M_4(-3;-3;1)$ цэгүүдийг
а) нэг хавтгай дээр орших эсэхийг шалга.
б) $(M_1M_2M_3)$, $(M_2M_3M_4)$, $(M_1M_3M_4)$, $(M_1M_2M_4)$ хавтгайнуудын тэгшитгэлийг бич.

в) M_1 цэгээс $(M_2M_3M_4)$ хавтгай хүртэлх зайг ол.

г) $(M_1M_2M_3M_4)$ пирамидын эзлэхүүнийг оо.

№64. Дараах нөхцлийг хангах эллипсийн хялбар тэгшитгэлийг бич.

а) Фокусуудын хоорондох зай 6, бага хагас тэнхлэг 4

б) Их хагас тэнхлэг нь 10, эксцентриситет 0.6

в) Хагас тэнхлэгүүдийн нийлбэр 8, фокусуудын хоорондох зай 8

г) Нэг фокусаас их тэнхлэгийн төгсгөлүүд хүрэх зай 7; 1.

№65. $x^2 + 9y^2 = 81$ эллипсийн эксцентриситет ба фокусыг ол.

№66. $M_1(\sqrt{3}; -2)$ $M_2(-2\sqrt{3}; 1)$ цэгүүдийг дайрсан эллипсийн хялбар тэгшитгэлийг бичиж, түүний эксцентриситетийг ол.

№67. $9x^2 + 25y^2 = 225$ эллипс дээр орших M цэгээс баруун фокус хүрэх зай нь зүүн фокус хүрэх зайнаас 4 дахин их байх M цэгийг ол.

№68. Хэрэв эллипсийн бага тэнхлэг нь фокусаас тэгш өнцгөөр харагддаг бол энэ эллипсийн эксцентриситетийг ол.

№69. Дараах нөхцлийг хангасан гиперболын тэгшитгэлийг бич.

а) Фокусуудын хоорондох зай 16, оройнуудын хоорондох зай 12

б) Бодит хагас тэнхлэг нь 3, $\varepsilon = \frac{5}{3}$

в) Хуурмаг хагас тэнхлэг нь 2, гипербол нь $M(2\sqrt{6}, 2)$ цэгийг дайрна.

№70. Эллипсийн эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$ эллипс дээр орших M цэгийн фокус хүрэх зай 10 бол M цэгээс тэр фокусын талд орших директрис хүрэх зайг ол.

№71. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ эллипсийн $M(2; -\frac{5}{3})$ цэгийн фокусын радиусыг агуулсан шулууны тэгшитгэл бич.

№72. Дараах тохиолдлуудад эллипсийн тэгшигэл бич.

а) их тэнхлэг нь 26, фокус нь $F_1(-10; 0)$, $F_2(14; 0)$

б) Бага тэнхлэг нь 2 фокус нь $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$

в) фокус нь $F_1(-2; \frac{3}{2})$, $F_2(2; -\frac{3}{2})$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

г) фокус нь $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ директрисүүдийн хоорондох зай $12\sqrt{2}$.

№73. Хэрэв эллипсийн эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокус $F(2; 1)$ ба энэ фокусын талын директрис нь $x = 5$ тэгшитгэлтэй бол эллипсийн тэгшитгэл бич.

№74. $x^2 - 4y^2 = 16$ гиперболын фокус, эксцентриситет, асимптотын тэгшитгэлийг олж гиперболыг байгуул.

№75. $5x^2 + 8y^2 = 40$ эллипсийн фокус дээр оройнууд нь орших фокусууд нь энэ эллипсийн орой дээр орших гиперболын тэгшитгэл бич.

№76. $x^2 - y^2 = 8$ гипербол өгсөн байг. $K(4; 6)$ цэгийг дайрсан, фокус нь өгсөн гиперболын фокустай давхцах эллипсийн тэгшитгэл бич.

№77. Чиглүүлэгч нь $3x \pm 4y = 0$ тэгшитгэлтэй, фокусуудын хоорондох зай нь 20-той тэнцүү байх гиперболын тэгшитгэл бич.

№78. Гиперболын фокус нь абсцисс тэнхлэг дээр координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй байрлах бол дараах тохиолдлуудад гиперболын тэгшитгэл бич.

а) гиперболын $M_1(6;-1)$, $M_2(-8;2\sqrt{2})$ хоёр цэг өгсөн,
б) гиперболын $M_1(-5;3)$ цэг, $\varepsilon=\sqrt{2}$,
в) $M_1(\frac{9}{2};-1)$ ба чиглүүлэгч нь $y=\pm\frac{2}{3}x$ тэгшитгэлтэй,
г) гиперболын $M_1(-3;\frac{5}{2})$ цэг директрис нь $x=\pm\frac{4}{3}$,
д) Чиглүүлэгч нь $y=\pm\frac{3}{4}x$ ба директрис нь $x=\pm\frac{16}{5}$.

№79. Гиперболын $\varepsilon=\frac{13}{12}$, фокус $F(0;13)$, энэ фокусын талын директрис $13y-144=0$ тэгшитгэлтэй бол гиперболын тэгшитгэл бич.

№80. Гипербол дээр $M_1(1;-2)$ цэг орших ба фокус $F(-2;2)$, энэ фокусын талын директрис нь $2x-y-1=0$ бол гиперболын тэгшитгэл зохио.

№81. Гипербол дээр $A(-3;-5)$ цэг өгчээ. Фокус нь $F(-2;-3)$ ба энэ фокусын талын директрис $x+1=0$ тэгшитгэлтэй бол гиперболын тэгшитгэл бич.

№82. Дараах нөхцлийг хангасан параболын хялбар тэгшитгэл бич.

а) OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй, $M(1;-2)$ цэгийг дайрсан
б) OY тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй, фокус нь $F(0;-3)$ байх
в) OY тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй, $M(5;3)$ цэгийг дайрсан.

№83. $y^2=24x$ параболын фокусын координатыг олж, директриссийн тэгшитгэл бич.

№84. $y^2=10x$ параболын фокусыг дайруулан түүний тэнхлэгт перпендикуляр хөвч татжээ. Энэ хөвчийн уртыг ол.

№85. OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй, $x+y=0$ шулуун ба $x^2+y^2-8y=0$ муруйн огтлолын цэгийг дайрсан параболын хялбар тэгшитгэл бич.

№86. Фокус нь OX тэнхлэг дээр координатын эхийн зүүн талд байрлах ба параметр p нь $4x^2-9y^2=36$ гиперболын фокусаас түүний чиглүүлэгч хүрэх зайтай тэнцүү байх параболын хялбар тэгшитгэл бич.

№87. Фокусууд нь $5x^2+y^2=20$ эллипсийн фокусуудтай давхцах параболуудын хялбар тэгшитгэл бич.

№88. Дараах тэгшитгэлүүд ямар шугам дүрслэхийг тогтоож байгуул.

а) $y=3-4\sqrt{x-1}$, **б)** $x=-4+3\sqrt{y+5}$,
в) $x=2-\sqrt{6-2y}$, **г)** $y=-5+\sqrt{-3x-21}$.

№89. Дараах параболуудын оройн цэг, фокусын параметрийг ол.

а) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$ **б)** $y=4x^2-8x+7$, **в)** $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$,
г) $x=2y^2+2y+14$, **д)** $x=-\frac{1}{4}y^2+y$, **е)** $x=-y^2+2y-1$.

№90. Фокус нь $F(7;2)$, директрис нь $x-5=0$ тэгшитгэлтэй параболын тэгшитгэл бич.

№91. Параболын фокус нь $F(4;3)$, директрис нь $y+1=0$ бол түүний тэгшитгэлиг зохио.

№92. Параболын орой нь $A(-2;-1)$ ба директрис нь $x+2y-1=0$ бол параболын тэгшитгэл бич.

№93. Параболын орой $A(6;-3)$, директрис нь $3x-5y+1=0$ бол фокусыг ол.

№94. Параболын фокус нь $F(2;-1)$, директрис нь $x-y-1=0$ бол параболын тэгшитгэлийг бич.

№95. Дараах тэгшитгэлүүдэд ямар шугам дүрслэхийг тогтоож байгуул.
а) $3x^2-4y^2+18x+15=0$ **б)** $x^2+2y^2-2x+8y+7=0$
в) $9x^2-4y^2-36x-24y=0$ **г)** $x^2+y^2+4x-10y+20=0$
д) $x^2-10x+9=0$ **е)** $x^2+3y^2+2x-18y+31=0$
ё) $x^2+8x+y+15=0$.

№96. Дараах тэгшитгэлүүд ямар гадаргуу дүрслэхийг огтлолын тусламжтайгаар тогтоож зургийг зур.
а) $z=x^2+y^2$ **б)** $2x^2+y^2+z^2=4$ **в)** $x^2+y^2-4z^2=16$
г) $z=x^2-y^2$ **д)** $z=2x^2+y^2+1$ **е)** $(x-1)^2+3y^2=z$
ё) $x=2-z^2-y^2$ **ж)** $x^2+2y^2=(z-1)^2$ **з)** $y^2=2x$
и) $2x=x^2+y^2$ **к)** $y^2=x^2+4z^2$.

№97. $A(2;-1;-3)$ цэгийг дайран гарах $C(3;-2;1)$ цэг дээр төвтэй бөмбөлгийн вектор ба координатын хэлбэртэй тэгшитгэл бич.

№98. $x+2y+2z+3=0$ хавтгайг $M(1;1;-3)$ цэгт шүргэсэн, $r=3$ радиустай бөмбөлгийн тэгшитгэл бич.

№99. Байгуулагч нь $\mathbf{s}(2;-3;4)$ вектортэй параллель, чиглүүлэгч нь $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=1 \end{cases}$ шугам байх цилиндрийн тэгшитгэлийг бич.

№100. Чиглүүлэгч нь $\begin{cases} x^2-y^2=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ба байгуулагч нь чиглүүлэгчийн орших хавтгайд перпендикуляр байх цилиндрийн тэгшитгэл бич.

№101. Чиглүүлэгч нь $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ ба $M(3;-1;-2)$ цэг дээр оройтой конусын тэгшитгэл бич.

№102. Координатын эх дээр оройтой чиглүүлэгч нь $\begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ байх конусын тэгшитгэл бич.

Хариу

1. а) $3x+7y-37=0$, **б)** $x+1=0$ **2.** $x-y+3=0$ **3.** 3 кв. нэгж **4. а)** $a=\pm 2$, **б)** $a=-\frac{1}{2}$, **в)** $a=8$ **6.** $x+y-1=0$ **7.** $2x+5y-10=0$ **11. а)** $2x-3y-23=0$, **б)** $x-2=0$, **в)** $2x+3y-3=0$ **12. а)** $y=1$, **б)** $x=5$ **16. а)** $2x+3y-4=0$, **б)** $x+y-5=0$ **17. а)** $3x-2y-1=0$, **б)** $3x+4y-12=0$ **18. а)** $5x+3y-7=0$, **б)** $3x-5y-11=0$ **19. а)** $2x+3y-7=0$, **б)** $3x-2y+9=0$ **20.** $(3;2)$ **22. а)** $\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$, **б)** $\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$, **в)** $\varphi=\frac{\pi}{4}$ **23.** 9,6 **24** 5,5 **26.** $4x+2y-5z+9=0$ **27.** $x+2y-3z+2=0$ **28. а)** Хавтгай координатын эхийг дайрна, **б)** Хавтгай OX тэнхлэгийг дайрна, **в)** Хавтгай OY тэнхлэгтэй паралель, **г)** OXZ хавтгайтай паралель **29. а)** $2x+7y+z-12=0$, **б)** $x-3z-2=0$, **в)** $x-y=0$ **30. а)** $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$, **б)** $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$ **31. а)** $\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-1}{1}$, **б)** $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{0}$, **в)** $\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-1}{1}$ **32. а)** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{3}$, **б)** $\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{0}=\frac{z+5}{2}$, **в)** $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{3}$ **33. а)** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-4}$, **б)** $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$, **в)** $\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}$, **г)** $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$ **34.** $y+z-1=0$ **35.** $x+3y-3z-6=0$ **36. а)** оршихгүй, **б)** оршино **37.** $2x+3y-z+4=0$ **38.** $4x-3y-z-11=0$ **39.** $x-y-z+6=0$ **40.** $2y-z+5=0$ **41.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$ **42.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+3}{5}$ **43.** $\frac{x-1}{-7}=\frac{y-3}{13}=\frac{z}{1}$ **44. а)** $\varphi=\arccos\frac{1}{2\sqrt{91}}$, **б)** $\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{38}}$, **в)** $\varphi=\arccos\frac{64}{77}$ **47.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r_1})\cdot\mathbf{a}$ **48. а)** $\varphi=\arcsin\frac{15}{19}$, **б)** $\varphi=\arcsin\frac{26}{29}$, **в)** $\varphi=\arcsin\frac{8}{9\sqrt{2}}$ **49.** $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-10}{2}$ **50.** $M'(\frac{1}{3},-\frac{11}{3},\frac{10}{3})$ **51.** $N(3,3,0)$ **52.** $x+2y+2z-25=0$ **53.** $18x+9y+z-32=0$ **54.** $\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+(\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2})t$, $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ **55.** $z=8$ **56. а)** $\frac{9}{\sqrt{14}}$, **б)** $\frac{5}{\sqrt{3}}$ **57.** $\frac{11}{\sqrt{66}}$ **58.** $\frac{13}{2\sqrt{14}}$ **59.** $N(7,0,1)$

60. **а)** $\varphi = \arccos\frac{17}{35}$, **б)** $\varphi = \frac{\pi}{2}$, **в)** $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$ **64.** **а)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{76} = 1$, **б)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, **в)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, **г)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ **65.** $F_1(-6\sqrt{2}, 0)$, $F_2(6\sqrt{2}, 0)$, $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **66.** $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}$ **67.** $M(-\frac{15}{4}, \pm\frac{3\sqrt{7}}{4})$ **68.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **69.** **а)** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$, **б)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0$, **в)** $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ **70.** 15 **71.** $5x + 12y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$ **74.** $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **75.** $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ **76.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ **77.** $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ **79.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = -1$ **80.** $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$ **81.** $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0$ **82.** **а)** $y^2 = 4x$, **б)** $x^2 = -12y$, **в)** $x^2 = \frac{25}{3}y$ **83.** $F(6, 0)$, $x = -6$ **84.** 10 **85.** $y^2 = -4x$ **86.** $y^2 = -4x$ **87.** $x^2 = \pm 16y$ **90.** $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$ **91.** $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$ **92.** $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$ **93.** $F(9; -8)$ **94.** $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ **95.** **а)** Гипербол, **б)** Эллипс, **в)** Огтлолцсон хос шулуун, **г)** Тойрог, **д)** Хос паралель шулуун, **е)** Хоосон олонлог, **ё** Парабол **96.** **а)** Эргэлтийн параболоид, **б)** Гурван тэнхлэгтэй эллипсоид, **в)** Нэг хөндийт гиперболоид, **г)** Гиперболлог параболоид, **д)** Эллипслэг параболоид, **е)** Эллипслэг параболоид, **ё)** Гиперболлог параболоид, **ж)** Конус гадаргуу, **з)** Параболлог цилиндр, **и)** Дугуй цилиндр, **к)** Конус гадаргуу **98.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$, $x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$ **99.** $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$ **100.** $x^2 - y^2 - 2zx + 2zy + x + y = 0$ **101.** $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy - 2yz + 10xz - 4y - 12x - 12z + 4 = 0$ **102.** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

V бүлэг. Шугаман огторгуй

5.1. Шугаман огторгуй, дэд огторгуйн тодорхойлолт

$x, y, z, \ldots$ элементүүдийн хоосон биш олонлог V ба бодит тооны олонлог $\mathbb{R}$-ийг авч үзье. V олонлогийн (x, y) хос бүрд V олонлогийн тодорхой z элементийг харгалзуулах хууль мэдэгдсэн гэе. Энэ тохиолдолд V олонлог дээр нэмэх үйлдэл гэж нэрлэгдэх дотоод үйлдэл тодорхойлогдлоо гэж ярина. z-ийг x, y элементүүдийн нийлбэр гэх ба $z = x + y$ гэж бичнэ. Үүнээс гадна $\forall x \in V$ ба $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ бүрд V-ийн тодорхой w элементийг харгалзуулах хууль мэдэгдэж байвал V дээр гадаад үйлдэл тодорхойлогдлоо гэх ба энэ V-ийн элементүүдийг α тоогоор үржүүлэх үйлдэл гэнэ. Элемент w-ийг x элементийг α тоогоор үржүүлсэн үржвэр гэж нэрлээд $z = ax$ буюу $z = x\alpha$ гэж тэмдэглэнэ.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *V олонлог дээр тодорхойлогдсон нэмэх ба тоогоор үржүүлэх үйлдэл нь*

1. $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$

2. $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z, \quad x, y, z \in V$

3. $\forall x \in V$,*-ийн хувьд* $x + 0 = x$ *байх 0 элемент* V*-д оршин байх* $0 \in V$. *Энэ тэг элементийг* V*-ийн тэг элемент гэж нэрлэнэ.*

4. $\forall x \in V$ *бүрд* x*-ийн эсрэг элемент гэж нэрлэгдэх* $x + (-x) = 0$ *нөхцлийг хангах* $-x$ *элемент* V*-д олдох*

5. $\forall x \in V, \quad 1 \cdot x = x$

6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in V$*-ийн хувьд* $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

чанартай байвал V олонлогийг бодит шугаман огторгуй буюу вектор огторгуй гэнэ. Эдгээр 1-8 чанарыг шугаман огторгуйн аксиом гэнэ.

Шугаман огторгуй үүсгэж байгаа $x, y, z, \ldots$ элементүүдийн олонлогийг шугаман огторгуйн элемент буюу векторууд гэж нэрлээд $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ гэж тэмдэглэнэ.

Үүнтэй адилаар комплекс шугаман огторгуйг тодорхойлж болно. Энд $\mathbb{R}$-ийн оронд $\mathbb{C}$-г авна.

Цаашид бодит комплекс гэж ялгахгүйгээр шугаман огторгуй гэж нэрлэе. Хэрэв бодит ба комплекс шугаман огторгуй гэж онцлон заах тохиолдол гарвал бодит, комплекс шугаман огторгуй гэж тусгайлан заана.

Шугаман огторгуйн тодорхойлолтоос дараах өгүүлбэр мөрдөн гарна.

1. Шугаман огторгуй зөвхөн ганц тэг элементтэй (вектортой).

Баталгаа. V шугаман огторгуй $\mathbf{0_1}, \mathbf{0_2}$ гэсэн 2 тэг элементтэй юм гэе. Тэгвэл $\mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} = \mathbf{0_1}$, $\mathbf{0_2} + \mathbf{0_1} = \mathbf{0_2}$ болох ба шугаман огторгуйн нэгдүгээр чанараар $\mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} = \mathbf{0_1}$, $\mathbf{0_2} + \mathbf{0_1} = \mathbf{0_2} \Rightarrow \mathbf{0_1} = \mathbf{0_2}$ байна. ▲

2. V шугаман огторгуйн $\mathbf{x}$ элемент бүхэн зөвхөн ганц эсрэг элементтэй.

Баталгаа. $\forall \mathbf{x} \in V$ элемент $-\mathbf{x_1}, -\mathbf{x_2}$ гэсэн 2 эсрэг элементтэй юм гэе. Тэгвэл

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x_1}) + (-\mathbf{x_2}) = (\mathbf{x} + (-\mathbf{x_1})) + (-\mathbf{x_2}) = \mathbf{0} + (-\mathbf{x_2}) = -\mathbf{x_2}$$
$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x_1}) + (-\mathbf{x_2}) = (\mathbf{x} + (-\mathbf{x_2})) + (-\mathbf{x_1}) = \mathbf{0} + (-\mathbf{x_1}) = -\mathbf{x_1}$$

Эдгээрийн хоёр талыг жишиж үзвэл $-\mathbf{x_1} = -\mathbf{x_2}$. ▲

3. $-\mathbf{x}$ элементийн эсрэг элемент нь $\mathbf{x}$ байна.

4. $\forall \mathbf{x} \in V$ элементийг $0 \in \mathbb{R}$-ээр үржүүлэхэд тэг элемент гарна.

Баталгаа. $0 \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x} + [\mathbf{x} + (-\mathbf{x})] = (0\mathbf{x} + \mathbf{x}) + (-\mathbf{x}) = (0+1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. ▲

5. $-1 \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Баталгаа. Шугаман огторгуйн VII аксиом, 4-р мөрдлөгөөг хэрэглэн $-1\mathbf{x} + \mathbf{x} = (-1+1)\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ байх ба $-1\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ байна. ▲

6. Тэг элемент ба дурын α-ийн үржвэр тэг элемент байна.

Баталгаа. Шугаман огторгуйн аксиомуудыг хэрэглэвэл
$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) = \alpha(\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha(-1)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + (-\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. ▲

7. Хэрэв

$$\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \alpha \neq 0 \tag{5.1}$$

бол $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ байна. ▲

Баталгаа. $\alpha \neq 0 \ \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{0} \ \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. ▲

8. Хэрэв

$$\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{5.2}$$

бол $\alpha = 0$ байна.

Баталгаа. $\alpha \neq 0$ гэвэл $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{0} \ \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ болох ба нөхцөлд $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ харшилна. Иймд $\alpha = 0$. ▲

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ элементүүдийн ялгаврыг $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ гэж тодорхойлох ба $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ гэж бичнэ.

Жишээ 5.1. M_3 нь бүх чөлөөт векторуудын олонлог гэе. Векторын нэмэх, тоогоор үржүүлэх үйлдлийг гуравдугаар бүлэгт судалснаар тодорхойлбол M_3 нь бодит шугаман огторгуй болно.

Жишээ 5.2. Эрэмбэлэгдсэн n тооны олонлог

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

авч үзье.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$-ийн хувьд $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$ гэж үржүүлэх үйлдлийн хувьд 1-8-р чанар биелнэ. Иймд $\mathbb{R}^n$ нь бодит биелнэ. Иймд $\mathbb{R}^n$ нь бодит шугаман огторгуй болно. $\mathbb{R}^n$-ийг арифметик огторгуй гэж нэрлэе.

Жишээ 5.3. $m \times n$ эрэмбийн бодит матрицуудын олонлог $R_{m\times n}$-ийг авч үзье. $m \times n$ эрэмбийн матрицуудын нийлбэр, $m \times n$ эрэмбийн матрицыг α тоогоор үржихэд гарах матриц нь мөн л $m \times n$ эрэмбийн матриц байх ба 1-8-р чанарыг хангана.

Бодолт. Тухайлбал $\forall B_{m\times n}, A_{m\times n} \in R_{m\times n}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ авахад $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n} \in \mathbb{R}$ (дотоод үйлдэл), $\alpha \cdot A_{m\times n} \in R_{m\times n}$ (гадаад үйлдэл) байна. Энэ үйлдлүүд нь
Чанар 1. $A_{m\times n} + B_{m\times n} = B_{m\times n} + A_{m\times n}$
Чанар 2. $A_{m\times n} + B_{m\times n} + C_{m\times n} = (A_{m\times n} + B_{m\times n}) + C_{m\times n} =$
$= A_{m\times n} + (B_{m\times n} + C_{m\times n})$
Чанар 3. $A_{m\times n} + O = A_{m\times n} \quad O \in R_{m\times n}$ (тэг матриц)
Чанар 4. $A_{m\times n} + (-1)A_{m\times n} = O$
Чанар 5. $1 \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$
Чанар 6. $\alpha(\beta A_{m\times n}) = (\alpha\beta)A_{m\times n}$
Чанар 7. $\alpha(A_{m\times n} + B_{m\times n}) = \alpha A_{m\times n} + \alpha B_{m\times n}$
Чанар 8. $(\alpha + \beta)A_{m\times n} = \alpha A_{m\times n} + \beta A_{m\times n}$
чанаруудтай. Иймд $R_{m\times n}$ шугаман огторгуй болно.

Жишээ 5.4. $\mathbb{C}^2$ комплекс тооны олонлог шугаман огторгуй болохыг батал.

Бодолт. Аксиомууд биелэхийг шалгая.
1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{x} = x_1 + ix_2, \quad \mathbf{y} = y_1 + iy_2$
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} + \mathbf{y} = x_1 + ix_2 + y_1 + iy_2 = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) \\ \mathbf{y} + \mathbf{x} = y_1 + iy_2 + x_1 + ix_2 = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in C^2$, $\mathbf{x} = x_1 + ix_2$, $\mathbf{y} = y_1 + iy_2$, $\mathbf{z} = z_1 + iz_2$-ийн хувьд $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ байх нь илэрхий.
3. $\mathbf{0} = 0 + 0i \in C^2$ байх ба $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$-ийн хувьд
$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1 + ix_2) + (0 + 0i) = (x_1 + 0) + i(x_2 + 0) = x_1 + ix_2 = \mathbf{x}$$
4. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2, \ \mathbf{x} = x_1 + ix_2, \ \mathbf{h} = h_1 + ih_2$ авахад $\mathbf{x} + \mathbf{h} = \mathbf{0}$ бол
$\mathbf{x} + \mathbf{h} = (x_1 + h_1) + i(x_2 + h_2) = \mathbf{0}$ ба $x_1 + h_1 = 0$, $x_2 + h_2 = 0$. Эндээс $h_1 = -x_1$, $h_2 = -x_2$ ба $\mathbf{h} = -x_1 + (-x_2)i = -(x_1 + ix_2) = -\mathbf{x}$, $-\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$
5. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2; \ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ авахад $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
7. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
чанарууд биелэх нь илэрхий.

Жишээ 5.5. $1\times n$ матрицуудын $R_{1\times n}$ олонлогт нэмэх үйлдлийг матрицын нэмэх үйлдэлтэй адилаар, харин тоогоор үржүүлэх үйлдлийг

$$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

гэж тодорхойлбол $\mathbb{R}_{1\times n}$ нь шугаман огторгуйн I–VII аксиомуудыг хангах боловч харин VIII аксиомыг хангахгүй. Иймээс шугаман огторгуй үүсгэхгүй.

Жишээ 5.6. n үл мэдэгдэгчтэй m шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн $Ax = 0$ системийг авч үзье.

$\operatorname{rang} A = r$, $r < n$ гэе. Тэгвэл энэ систем нь төгсгөлгүй олон шийдтэй. Энэ шийдүүдийн олонлогийг V гэвэл энэ нь шугаман огторгуй үүсгэнэ.

Бодолт. $AX = 0$ системийн хоёр шийдийн нийлбэр, шийдийг тоогоор үржүүлсэн нь $AX = 0$-ийн шийд болох ба V олонлог нь шугаман огторгуйн I–VIII аксиомыг хангана. Иймд $AX = 0$, $\operatorname{rang} A < n$ системийн шийдүүдийн олонлог шугаман огторгуй үүсгэнэ.

V шугаман огторгуйн элементүүдийн V_1 дэд олонлог нь
1. V_1 олонлогийн элементүүдийн нийлбэр, тоогоор үржүүлэх үйлдэл нь V-д тодорхойлогдсон шиг тодорхойлогдсон байх
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \in V_1$-ийн хувьд $\alpha \mathbf{x} \in V_1$ байх нөхцлийг хангаж байвал V_1-ийг V огторгуйн дэд огторгуй гэнэ. Шугаман огторгуйн дэд огторгуй нь шугаман огторгуй байна. Өөрөөр хэлбэл дэд огторгуй V_1-д шугаман огторгуйн I–VIII аксиом биелнэ. Тухайлбал:

$\forall \mathbf{x} \in V_1$ авахад $\mathbf{x} \cdot 0 \in V_1 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot 0 = \mathbf{0} \in V_1$ байна. Энэ нь V_1 дэд огторгуйд $\mathbf{0}$ элемент байна гэсэн үг.

$\forall \mathbf{x} \in V_1$-ийн эсрэг элемент $-\mathbf{x} \in V_1$ байна. Энэ нь $(-1)\mathbf{x} \in V_1 \Rightarrow (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \Rightarrow -\mathbf{x} \in V_1$ гэж батлагдаж байна. Энэ хоёроос бусад аксиомууд V_1-д биелэх нь илэрхий.

Шугаман огторгуйн тэг элемент $\mathbf{0}$ нь дэд шугаман огторгуй болно. V шугаман огторгуйг өөрийнхөө дэд огторгуй гэж үзэж болно.

5.2. Векторуудын шугаман хамаарал ба шугаман хамааралгүй байх

Тодорхойлолт. *V шугаман огторгуйн $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудын хувьд*

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_3 \mathbf{x_n}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

вектор V-д харъяалагдана (орно). $\mathbf{y}$ векторыг $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудаар шугаман илэрхийлэгдлээ гэж ярина. Энэ $\mathbf{y}$ векторыг $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудын шугаман эвлүүлэг гэнэ. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ тоонуудыг энэ шугаман эвлүүлгийн коэффициентүүд гэнэ.

Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудын шугаман эвлүүлгийн бүх коэффициентүүд тэгтэй тэнцүү тохиолдолд эдгээрийн шугаман эвлүүлэг нь тэг вектор болж байвал $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудыг шугаман хамааралгүй гэнэ.

Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудын шугаман эвлүүлгийн бүх коэффициентүүдаас ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай үед эдгээрийн шугаман эвлүүлэг нь тэг векторыг өгч байвал $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудыг шугаман хамааралтай гэнэ.

Дээрх тодорхойлолтуудыг

Хэрэв $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ үед

$$\alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{x_n} = \mathbf{0} \tag{5.3}$$

биелж байвал $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудыг шугаман хамааралгүй, хэрэв ядаж нэг $\alpha_i \neq 0$ үед (5.3) биелж байвал $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторууд шугаман хамааралтай гэж тодорхойлно.

Ганц $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ элементээс тогтох систем шугаман хамааралгүй. Үнэндээ $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$ нь зөвхөн $\alpha = 0$ үед биелнэ.

Зөвхөн ганц тэг вектороос тогтох систем шугаман хамааралтай. Энэ нь $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ нь $\alpha \neq 0$ үед биелнэ гэдгээс мөрдөн гарна.

Жишээ 5.7. M_3 шугаман огторгуйд (жишээ 5.1) дурын 2 тэгээс ялгаатай коллинеар векторууд шугаман хамааралтай.

Бодолт. Теорем 3.1-ээс $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ векторууд коллинеар бол $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ байх λ тоо олдоно. Тэгвэл $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ба энэ шугаман эвлүүлгийн коэффициентүүд нь $1, -\lambda$ байна. Иймд $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ шугаман хамааралтай.

Шугаман огторгуйн векторуудын хувьд дараах өгүүлбэрүүд хүчинтэй.

1. Шугаман хамааралтай k векторуудын системд дурын m тооны векторыг нэмж хавсаргахад гарах $k + m$ тооны векторуудын систем шугаман хамааралтай.

Баталгаа. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд шугаман хамааралтай гэж өгөгдсөн тул

$$\alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \ldots + \alpha_k\mathbf{x_k} = \mathbf{0} \tag{5.4}$$

нь зарим нэг $\alpha_i \neq 0$ үед биелнэ. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ системд $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_m}$ векторуудыг нэгтэхэд гарах $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$, $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_m}$ векторуудын хувьд ((5.4)-г харгалзаж үзвэл)

$$\alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \ldots + \alpha_k\mathbf{x_k} + 0 \cdot \mathbf{y_1} + 0 \cdot \mathbf{y_2} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{y_m} = \mathbf{0}$$

(энд зарим $\alpha_i \neq 0$) биелнэ. Энэ нь $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$, $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_m}$ векторууд шугаман хамааралтайг заана. ▲

2. Шугаман хамааралгүй k векторуудын системээс дурын $m < k$ тооны векторуудыг хасаж орхиход үүсэх векторууд шугаман хамааралгүй систем үүсгэнэ.

Баталгаа. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ системээс эхний $m < k$ тооны векторуудыг хасахад $\mathbf{x_{m+1}}, \mathbf{x_{m+2}}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторуудын систем үүснэ. Энэ үүссэн систем шугаман хамааралтай бол $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ систем шугаман хамааралтай болно. Иймд $\mathbf{x_{m+1}}, \mathbf{x_{m+2}}, \ldots, \mathbf{x_k}$ шугаман хамааралгүй. ▲

3. Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторуудын дотор $\mathbf{x}_\ell = \lambda \mathbf{x_m}$, $(\ell \neq m,\ \ell < k)$ байх $\mathbf{x_l}, \mathbf{x_m}$ векторууд байгаа бол $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд шугаман хамааралтай.

Баталгаа. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторуудын хувьд

$$0 \cdot \mathbf{x_1} + 0 \cdot \mathbf{x_2} + \ldots + \mathbf{x_l} - \lambda \mathbf{x_m} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x_k} = \mathbf{0}$$

эвлүүлгийн коэффициентүүд зарим нь тэгтэй тэнцүү биш байгаа тул $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд шугаман хамааралтай. ▲

4. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд дотор тэг $\mathbf{0}$ вектор орсон байвал $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд шугаман хамааралтай.

Баталгаа. $\mathbf{x_i} = 0 \quad \alpha \neq 0$ гэе. Тэгвэл

$$0 \cdot \mathbf{x_1} + 0 \cdot \mathbf{x_2} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x_{i-1}} + \alpha \cdot \mathbf{x_i} + 0 \cdot \mathbf{x_{i+1}} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x_k} = \mathbf{0}$$

гэсэн шугаман эвлүүлгийн бүх коэффициентүүд дотор $\mathbf{x_i} = \mathbf{0}$ векторын коэффициент $\alpha \neq 0$ байна. Иймд $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд шугаман хамааралтай. ▲

Теорем 5.1. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \ldots, \mathbf{x_k}$ $(k > 1)$ векторуудын шугаман хамааралтай байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь эдгээр векторуудаас дор хаяж нэг вектор нь үлдсэн векторуудынхаа шугаман эвлүүлэг болж байх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд шугаман хамааралтай бол $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x_i} = \mathbf{0}$ шугаман эвлүүлгийн коэффициентүүд дотор дор хаяж нэг нь тэгээс ялгаатай байна. $\alpha_m \neq 0$ гэе. Тэгвэл

$$\mathbf{x_m} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_m}\right) \mathbf{x_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k} \beta_i \mathbf{x_i} \quad \textit{буу} \quad \mathbf{x_m} - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{x_i} = \mathbf{0}$$

Энд $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_m}$ болно. Ийнхүү $\mathbf{x_m}$ вектор бусад векторуудынхаа шугаман эвлүүлэг болж байна.

$\Leftarrow$: $\mathbf{x_m}$ вектор бусад векторуудынхаа шугаман эвлүүлэг болдог гэвэл $\mathbf{x_m} - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k} \beta_i \mathbf{x_i} = \mathbf{0}$ эвлүүлгийн коэффициентууд дотор тэгээс ялгаатай коэффициент олдоно ($\mathbf{x_m}$-ийн коэффициент). Иймд $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторууд шугаман хамааралтай. ▲

Тодорхойлолт. *Шугаман огторгуйн хоёр вектор шугаман хамааралтай бол тэдгээрийг коллинеар, шугаман хамааралгүй бол коллинеар биш векторууд гэнэ.*

Хэрэв шугаман огторгуйн гурван вектор шугаман хамааралтай бол тэдгээрийг компланар, хэрэв шугаман хамааралгүй бол компланар биш векторууд гэнэ.

Ийнхүү §3.1-д судалсан векторуудын коллинеар, компланар байх нь M_3 шугаман огторгуйн вектоууудуудын коллинеар, компланар байхтай давхцана.

5.3. Шугаман огторгуйн суурь ба хэмжээс. Изоморфизм

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *V шугаман огторгуйд*
1. *n тооны шугаман хамааралгүй векторууд олддог.*
2. *Дурын $n+1$ тооны векторууд нь шугаман хамааралтай*
гэсэн нөхцлүүд биелдэг байвал n тоог шугаман огторгуй V-ийн хэмжээс гэнэ. Хэрэв шугаман огторгуй нь ганцхан тэг элементээс тогтсон бол түүний хэмжээсийг тэг гэж үзнэ.

V шугаман огторгуйн хэмжээсийг $dimV$ (dimension-размерность) гэж тэмдэглэнэ. $dimV = n$ байх V шугаман огторгуйг n хэмжээст огторгуй гэж нэрлэнэ.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. **n** *хэмжээст V огторгуйн дурын эрэмбэлэгдсэн n тооны шугаман хамааралгүй векторуудыг энэ огторгуйн суурь (базис) гэнэ.*

ТЕОРЕМ 5.2. Хэрэв $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ нь n хэмжээст огторгуйн суурь бол энэ огторгуйн дурын $\mathbf{x}$ вектор нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ суурийн векторуудаар шугаман илэрхийлэгдэнэ. Өөрөөр хэлбэл

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}$$

байна.

Баталгаа. $\forall\mathbf{x} \in V$ гэе. n хэмжээст огторгуйд $n+1$ тооны векторууд шугаман хамааралтай байдаг тул $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}, \mathbf{x}$ шугаман хамааралтай.

$$\beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n} + \beta_{n+1}\mathbf{x} = 0 \tag{5.5}$$

шугаман эвлүүлгийн коэффициентүүд $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ нь дор хаяж нэг нь тэгээс ялгаатай. Хэрэв $\beta_{n+1} = 0$ бол $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ коэффициентүүд дотор дор хаяж нэг $\beta_i \neq 0$ байх ба $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ векторууд шугаман хамааралтай болно. Иймээс $\beta_{n+1} \neq 0$ байна. $\beta_{n+1} \neq 0$ учраас (5.5)-аас

$$\mathbf{x} = -\frac{\beta_1}{\beta_{n+1}}\mathbf{e_1} + (-\frac{\beta_2}{\beta_{n+1}})\mathbf{e_2} + \ldots + (-\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}})\mathbf{e_n} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}$$

болно. Энд $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta_{n+1}}$ байна. ▲

ТЕОРЕМ 5.3. Хэрэв $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ нь V шугаман огторгуйн шугаман хамааралгүй векторууд ба энэ огторгуйн дурын вектор $\mathbf{x}$ нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$-ээр шугаман илэрхийлэгддэг бол V нь n хэмжээст огторгуй байна.

Баталгаа. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}, \mathbf{x_{n+1}}$ нь V огторгуйн дурын векторууд гэе. Эдгээр дурын $n+1$ векторууд нь шугаман хамааралтай гэж баталъя. Теоремын нөхцлөөр

$$\begin{array}{l} \mathbf{x_1} = \alpha_{11}\mathbf{e_1} + \alpha_{12}\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_{1n}\mathbf{e_n} \\ \mathbf{x_2} = \alpha_{21}\mathbf{e_1} + \alpha_{22}\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_{2n}\mathbf{e_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x_{n+1}} = \alpha_{n+11}\mathbf{e_1} + \alpha_{n+12}\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_{n+1n}\mathbf{e_n} \end{array}$$

байна. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$-г шугаман хамааралгүй гэдгийг анхааран үзвэл $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i \mathbf{x_i} = \beta_1(\alpha_{11}\mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_{1n}\mathbf{e_n}) + \beta_2(\alpha_{21}\mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_{2n}\mathbf{e_n}) + \ldots + \beta_{n+1}(\alpha_{n+11}\mathbf{e_1} + \alpha_{n+12}\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_{n+1n}\mathbf{e_n}) = \mathbf{0}$ тэнцэл нь зөвхөн

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{21}\beta_2 + \ldots + \alpha_{n+11}\beta_{n+1} = 0 \\ \alpha_{12}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \ldots + \alpha_{n+12}\beta_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\beta_1 + \alpha_{2n}\beta_2 + \ldots + \alpha_{n+1n}\beta_{n+1} = 0 \end{array}\right\}$$

биелэх үед л биелнэ.

$n+1$ үл мэдэгдэгчтэй n шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн систем тэг биш шийдтэй байдаг. Энэ системийн шийд $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1})$-ийн дотор ядаж нэг тэгээс ялгаатай тоо олдоно. Иймд $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i \mathbf{x_i} = \mathbf{0}$ нь $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$, $\mathbf{x_{n+1}}$ векторууд шугаман хамааралтайг заана. Дурын $n+1$ векторууд нь шугаман хамааралтай ба дурын вектор нь шугаман хамааралгүй n вектороор шугаман илэрхийлэгдэж байгаа учраас V огторгуй нь n хэмжээстэй. ▲

Энэ теоремоос үзэхэд V огторгуйд $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ шугаман хамааралгүй векторууд олдоод, энэ огторгуйн дурын вектор нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ векторуудаар шугаман илэрхийлэгдэж байвал V огторгуй n хэмжээстэй ба $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ векторууд нь суурь болох нь харагдаж байна.

ЖИШЭЭ 5.8. Жишээ 5.1-д авч үзсэн M_3 огторгуйд $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ векторууд нь суурь болно.

Бодолт. **i, j, k** векторууд компланар биш учраас шугаман хамааралгүй байна. Мөн $\dim M_3 = 3$. Иймд $\forall \mathbf{x} \in M_3 : \mathbf{x} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ гэж бичигдэнэ.

V, V' гэсэн хоёр шугаман огторгуй авч үзье. Хэрэв эдгээр огторгуйн элементүүдийн хооронд харилцан нэг утгатай харгалзааг тогтоосон бол $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x}' \in V'$ гэж тэмдэглэе.

Тодорхойлолт. *Хэрэв* $\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in V$ *авахад* $\mathbf{x_1} \leftrightarrow \mathbf{x_1'}$, $\mathbf{x_2} \leftrightarrow \mathbf{x_2'}$, $\mathbf{x_1'}, \mathbf{x_2'} \in V'$ *ба* $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \leftrightarrow \mathbf{x_1'} + \mathbf{x_2'}$, $\alpha\mathbf{x_1} \leftrightarrow \alpha\mathbf{x_1'}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ *байвал* V, V' *огторгуйнуудыг изоморф огторгуй гэнэ.*

Теорем 5.4. Хоёр бодит (комплекс) шугаман огторгуй ижил хэмжээстэй байх зөвхөн тэр үед л изоморф байна. Өөрөөр хэлбэл $\dim V = \dim V' \Leftrightarrow V \simeq V'$ (изоморф).

Баталгааг уншигчдад дасгал болгон үлдээе.

5.4. Векторын координат

Теорем 5.5. Хэрэв $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ нь V шугаман огторгуйн суурь бол $\forall \mathbf{x} \in V$-ийн хувьд

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n} \tag{5.6}$$

байх $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ тоонуудын цор ганц систем олдоно.

Баталгаа. Теорем 5.2-оор (5.6) тэнцэл биелэх $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ тоонуудын систем олдоно. Одоо бид тийм систем ганц олдоно гэдгийг баталъя.

Эсрэгээс нь (5.6) систем биелэх $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ гэсэн 2 систем олддог гэе. Тэгвэл

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}, \quad \mathbf{x} = \beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n}$$

ба $\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n} = \beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n}$ байна. Эндээс $(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{e_2} + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e_n} = 0$ болох ба $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ шугаман хамааралгүй тул $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$ буюу $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. ▲

(5.6)-г $\mathbf{x}$ *векторыг* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ *сууриар задалсан задаргаа гэнэ. (5.6)-г*

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

гэж матрицан хэлбэрт бичнэ. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *тоонуудыг* $\mathbf{x}$ *векторын* $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n})$ *суурь дахь координат гээд* $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *гэж тэмдэглэнэ.*

Жишээ 5.9. Жишээ 5.1-д авч үзсэн M_3 огторгуйд $(\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ тэгш өнцөгт декартын координатын системийг авахад M_3 огторгуйн $\mathbf{x}$ векторын $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ суурь дахь координат нь түүний тэгш өнцөгт координаттай давхцана.

Жишээ 5.10. V нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \mathbf{e_5}$ суурьтай таван хэмжээст огторгуй юм гэе. Өгсөн суурь дахь $\mathbf{e_2}$ ба $\mathbf{x} = 3\mathbf{e_1} - \mathbf{e_3} + 2\mathbf{e_4}$ векторуудын координатыг ол.

Бодолт. $\mathbf{e_2}, \mathbf{x}$ векторууд нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \mathbf{e_5}$ сууриар

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{e_1} + 0 \cdot \mathbf{e_2} + (-1) \cdot \mathbf{e_3} + 2\mathbf{e_4} + 0 \cdot \mathbf{e_5}$$
$$\mathbf{e_2} = 0 \cdot \mathbf{e_1} + 1 \cdot \mathbf{e_2} + 0 \cdot \mathbf{e_3} + 0 \cdot \mathbf{e_4} + 0 \cdot \mathbf{e_5}$$

гэж илэрхийлэгдэнэ. Иймд $\mathbf{x} = (3, 0, -1, 2, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1, 0, 0, 0)$ координаттай.

Дараах өгүүлбэрүүд хүчинтэй.

1. Огторгуйн вектор тэг вектор байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний дурын суурь дахь бүх координат тэгтэй тэнцүү байх юм.

Баталгаа. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт $\mathbf{x}$ векторын бүх координатууд тэгтэй тэнцүү бол $\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{e_1} + 0 \cdot \mathbf{e_2} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{e_n} = \mathbf{0}$ ба $\mathbf{x}$ нь тэг вектор байна.

Хэрэв $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт $\mathbf{x}$ вектор нь тэг вектор бол

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0}$$

байна. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$-үүд нь шугаман хамааралгүй гэдгээс $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ байна. Энэ нь $\mathbf{x}$ векторын бүх координат тэгтэй тэнцүү гэдгийг харуулж байна. ▲

2. Ямар нэг суурь дахь хоёр векторын нийлбэр векторын координат нь нэмэгдэхүүн векторын харгалзах координатуудын нийлбэртэй тэнцүү.

Баталгаа. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n} \text{ буюу } \mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$
$$\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n} \text{ буюу } \mathbf{y}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

байдаг гэе. Тэгвэл

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}) + (\beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n})$$

нь шугаман огторгуйн I, II, VIII аксиомоор

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{e_2} + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{e_n}$$

болно. Векторыг сууриар задлах задаргаа нэг утгатай байдаг учраас $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ нь $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ координаттай болно. ▲

3. Ямар нэг суурь дахь векторыг тоогоор үржүүлэхэд гарах векторын координат нь уул векторын энэ суурь дахь координатыг тэр тоогоор үржүүлсэнтэй тэнцүү.

Баталгаа. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурь. $\mathbf{x}$ векторын энэ суурь дахь координат $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ гэе.

$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ тоогоор $\mathbf{x}$ векторыг үржүүлье. $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}$, $\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha_1\mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n})$ шугаман огторгуйн аксиомуудыг хэрэглэвэл

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda\alpha_1)\mathbf{e_1} + (\lambda\alpha_2)\mathbf{e_2} + \ldots + (\lambda\alpha_n)\mathbf{e_n}$$

болно. $\lambda\mathbf{x}$ вектор нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$ координаттай байна. ▲

4. $\mathbf{x}$ вектор нь $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторуудын шугаман эвлүүлэг болж байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\mathbf{x}$ векторын ямар нэг суурь дахь координат бүр нь $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_k}$ векторуудын харгалзах координатын шугаман эвлүүлэг байх явдал юм.

Баталгааг суралцагчдад үлдээв.

5. Хоёр вектор тэнцүү байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь нэг суурь дахь харгалзах координатууд нь тэнцүү байх явдал юм.

Эдгээр чанарууд нь вектор дээр хийх үйлдлүүд нь тэдгээрийн координатууд дээр хийх үйлдэл юм гэдгийг зааж байна.

Жишээ 5.11. Ямар нэг суурьт $\mathbf{x}(2, -1, 3, 5)$, $\mathbf{y}(-1, 4, 0, -2)$ векторууд өгчээ. $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$ векторын координатыг ол.

Бодолт. $2\mathbf{x}(4, -2, 6, 10)$, $-3\mathbf{y}(3, -12, 0, 6)$ векторуудын нэмье. $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = 2\mathbf{x} + (-3\mathbf{y}) = 4\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + 6\mathbf{e_3} + 10\mathbf{e_4} + (3\mathbf{e_1} - 12\mathbf{e_2} + 0 \cdot \mathbf{e_3} + 6\mathbf{e_4}) = 7\mathbf{e_1} - 14\mathbf{e_2} + 6\mathbf{e_3} + 16\mathbf{e_4}$ $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$ вектор нь $(7, -14, 6, 16)$ координаттай.

5.5. Векторуудын системийн матриц

$$\begin{array}{l} \mathbf{x_1}(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \\ \mathbf{x_2}(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) \\ \mathbf{x_3}(a_{13}, a_{23}, \ldots, a_{n3}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x_m}(a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm}) \end{array} \tag{5.7}$$

n хэмжээст шугаман огторгуйн ямар нэг суурь дахь векторуудын систем өгчээ гэе.

Энэ векторуудын координатуудаар матриц зохиовол

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

энэ матрицын j-р багана нь $\mathbf{x_j}$ векторын координатууд байна.

Энэ A матрицыг $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ векторуудын системийн өгсөн суурь дахь матриц гэнэ.

Үүний урвуу нь хэрэв (5.8) матриц өгөгдвөл үүнд харгалзсан n хэмжээст огторгуйн m векторуудын системийг зохиож болно.

Хэрэв (5.8) матрицын k тооны багануудад харгалзах векторууд нь шугаман хамааралгүй бол тэдгээр багануудыг шугаман хамааралгүй гэж үздэг. Үүний урвууг нь (5.8) матрицын шугаман хамааралгүй багануудад харгалзах векторууд нь мөн шугаман хамааралгүй байна гэж үзнэ.

ТЕОРЕМ 5.6. n хэмжээст огторгуйн m векторууд шугаман хамааралгүй байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь m векторуудын системийн матрицын ранг m-тэй тэнцэх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: (5.7) систем шугаман хамааралгүй юм гэе. Тэгвэл эдгээр векторууд дотор тэг вектор байхгүй ба A матрицын ранг тэгээс их байна. Бид $\operatorname{rang} A < m$ гэж үзье. Суурь минорын тухай теорем 1.15-аар A матрицын суурь биш багана нь суурь багануудын шугаман эвлүүлэг болно. Иймд энэ баганад харгалзах вектор нь суурь багануудад харгалзах векторуудын шугаман эвлүүлэг байна. Энэ нь векторуудын (5.7) систем шугаман хамааралтайг харуулж байна. Иймд $\operatorname{rang} A = m$ байна.

$\Leftarrow$: $\operatorname{rang} A = m$ гэе. Тэгвэл A матрицын суурь минор M нь m эрэмбэтэй байна.

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ векторуудыг шугаман хамааралтай юм гэе. Тэгвэл A матрицын багануудын аль нэг нь бусад үлдсэн багануудынхаа шугаман эвлүүлэг болно. Энэ нь M минорын харгалзах багана бусад багануудынхаа шугаман эвлүүлэг болж байгааг заана. Эндээс $M = 0$ болно. Энэ нь M суурь минор гэдэгт харшилж байна. Иймд $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ векторууд шугаман хамааралгүй. ▲

МӨРДЛӨГӨӨ 1. n хэмжээст шугаман огторгуйн n векторуудын систем шугаман хамааралгүй байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь n векторуудын системийн матриц үл бөхөх юм.

МӨРДЛӨГӨӨ 2. Хэрэв m векторуудын системийн матрицын ранг нь r бол энэ систем векторуудын шугаман хамааралгүй векторуудын максималь тоо r-тэй ьэнцүү байна.

ЖИШЭЭ 5.12. $\mathbf{x_1}(2,3,-1,4)$, $\mathbf{x_2}(-1,1,2,0)$, $\mathbf{x_3}(0,0,1,1)$, $\mathbf{x_4}(1,4,1,4)$, $\mathbf{x_5}(2,3,0,5)$ векторуудын системд байгаа шугаман хамааралгүй векторуудын максималь тоог ол.

Бодолт. Энэ векторын системийн матриц нь

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

байна. Энэ матрицын ранг 3-тай тэнцүү байна. Иймд энэ векторуудын системд шугаман хамааралгүй векторуудын максималь тоо нь 3 байна.

5.6. Сууриас суурьт шилжих матриц. Векторын координатыг хувиргах

V шугаман огторгуйн

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n} \tag{5.9}$$

$$\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n} \tag{5.10}$$

гэсэн 2 (базис) суурийн векторуудыг авч үзье.

Тодорхойлолт. $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}$ *векторуудын системийн* $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n})$ *суурь дахь матрицыг (5.9) суурийн (5.10) суурьт шилжих матриц гэнэ.*

Тодорхойлолтоос үзэхэд, хэрэв (5.9) сууриас (5.10) суурьт шилжих матриц нь

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

бол $\begin{cases} \mathbf{e'_1} = t_{11}\mathbf{e_1} + t_{21}\mathbf{e_2} + \ldots + t_{n1}\mathbf{e_n} \\ \mathbf{e'_2} = t_{12}\mathbf{e_1} + t_{22}\mathbf{e_2} + \ldots + t_{n2}\mathbf{e_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e'_n} = t_{1n}\mathbf{e_1} + t_{n2}\mathbf{e_2} + \ldots + t_{nn}\mathbf{e_n} \end{cases}$ буюу

$$[\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}] = [\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}] \cdot T \tag{5.12}$$

байна.

Теорем 5.6-гаар бол сууриас суурьт шилжих шилжилтийн матриц нь үл бөхөх ба n эрэмбийн үл бөхөх матриц бүхнийг n хэмжээст огторгуйн нэг сууриас нөгөө суурьт шилжилтийн матриц гэж үзэж болно.

(5.11) матрицын урвуу матриц T^{-1} нь (5.10) сууриас (5.9) суурьт шилжих шилжилтийн матриц болно.

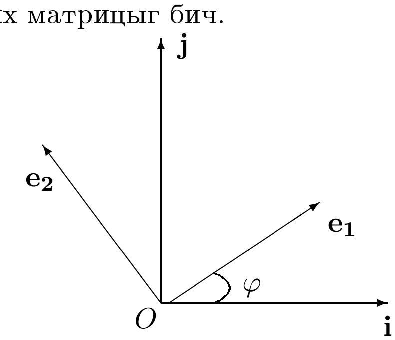
Жишээ 5.13. Шугаман огторгуй M_2-д $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ба $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ сууриудыг авч үзье (зураг 74). $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ сууриас $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт шилжих матрицыг бич.

Бодолт. Энэ тохиолдолд

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e_1} &= \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi \\ \mathbf{e_2} &= -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

байна. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ сууриас $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт шилжих матриц нь

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$



Зураг 74

Координатыг хувиргах бодлого нь өөр өөр суурь дахь векторын координатуудын хоорондын хамааралыг тогтоох бодлого болно.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Янз бүрийн суурь дахь векторын координатуудыг холбосон томъёог координатыг хувиргах томъёо гэнэ.*

ТЕОРЕМ 5.7. Хэрэв $\mathbf{x}$ вектор нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ координаттай, $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}$ суурьт $(\alpha'_1, \alpha'_2 \ldots, \alpha'_n)$ координаттай бол

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

буюу $X = TX'$ байна. Энд $X = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^{\mathrm{T}}$, $X' = [\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n]^{\mathrm{T}}$, T нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьаас $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}$ суурьт шилжих матриц

Баталгаа. Теоремын нөхцлөөр

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}]X \tag{5.13}$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}]X' \tag{5.14}$$

байна. (5.12) ба (5.14)-аас

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}]TX' \tag{5.15}$$

гэж гарна.

Векторыг суурьаар задлах задаргаа нэг утгатай гэдгийг анхааран үзвэл (5.13), (5.15)-аас

$$X = TX' \tag{5.16}$$

байх нь харагдаж байна. (5.16)-оос

$$X' = T^{-1}X \tag{5.17}$$

гэж гарна. ▲

(5.16) ба (5.17) томъёонуудыг координатыг хувиргах томъёо гэнэ.

ЖИШЭЭ 5.14. $\mathbf{x}$ вектор нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт $(1, -2)$ координаттай бол энэ векторын $\mathbf{e'_1} = \mathbf{e_1}$, $\mathbf{e'_2} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ суурь дахь координатыг ол.

Бодолт. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьаас $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}$ суурьт шилжих шилжилтийн матриц нь

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

байна. $\mathbf{x}$ векторын $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}$ суурь дахь координатыг (α'_1, α'_2) гэвэл

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

болох ба $\alpha'_1 = 3,\ \alpha'_2 = -2$ байна.

5.7. Евклид огторгуйн тодорхойлолт

Бодит шугаман огторгуй V-г авч үзье. Шугаман огторгуйд векторуудын нэмэх, векторыг тоогоор үржүүлэх гэсэн үйлдлүүдээс гадна өөр нэг үйлдэл оруулъя.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ гэсэн хос вектор бүрд нэг бодит $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ тоог харгалзуулъя. Энэ нь харгалзаа нь дараах чанартай. Үүнд:*

ЧАНАР 1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *(коммутатив)*

ЧАНАР 2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ *(дистрибутив).*

ЧАНАР 3. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

ЧАНАР 4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ *($\mathbf{x} = \mathbf{0}$ байх үед $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$).*

Энэ шинээр тодорхойлсон үйлдлийг скаляр үржвэр гэнэ. $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ тоог $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ векторуудын скаляр үржвэр гэнэ.

$(\mathbf{x}, \mathbf{x})$-г $\mathbf{x}$ векторын скаляр квадрат гэж нэрлээд $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ гэж тэмдэглэнэ.

Хэрэв $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ векторуудын аль нэг нь $\mathbf{0}$ (тэг) вектор бол скаляр үржвэр нь тэгтэй тэнцүү. Тухайлбал:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = (0\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Скаляр үржвэр тодорхойлогдсон бодит шугаман огторгуйг евклид огторгуй гэнэ. Евклид огторгуйг E үсгээр тэмдэглэж байя.*

Хэрэв n хэмжээст шугаман огторгуй нь евклид огторгуй бол түүнийг евклид n хэмжээст огторгуй гэх ба шугаман огторгуйн суурийг (баазыг) евклид суурь гэнэ.

ЖИШЭЭ 5.15. Жишээ 5.1-д авч үзсэн чөлөөт векторуудын M_3 огторгуйд чөлөөт векторуудын хувьд I-IV чанартай скаляр үржвэр (3.7)-д тодорхойлсон. Иймд M_3 огторгуй нь евклид огторгуй болно.

ЖИШЭЭ 5.16. $\mathbb{R}^n$-арифметик огторгуй. (Жишээ 5.2-ыг хар) Энэ огторгуйн $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ хос вектор бүхэнд

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \tag{5.18}$$

тоог харгалзуулбал энэ нь I-IV чанарыг хангах нь илэрхий. Энэ нь $\mathbb{R}^n$ огторгуйд скаляр үржвэр тодорхойллоо гэсэн үг юм. Иймд $\mathbb{R}^n$ огторгуй нь евклид огторгуй болно.

Жишээ 5.17. Шугаман огторгуй $\mathbb{R}_{n\times 1}$-д

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathrm{T}} \qquad Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^{\mathrm{T}}$$

хос матрицад

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{5.19}$$

тоог харгалзуулъя. Энэ харгалзаа нь I-IV чанарыг хангах тул (5.19) нь скаляр үржвэр болно. Иймд $\mathbb{R}_{n\times 1}$ огторгуйд (5.19) скаляр үржвэр тодорхойлбол $\mathbb{R}_{n\times 1}$ нь евклид огторгуй болно.

$1\times n$ хэмжээст бодит матрицуудын шугаман огторгуйд скаляр үржвэрийг (5.19) томъёогоор тодорхойлбол $1 \times n$ эрэмбийн матрицуудын шугаман огторгуй $\mathbb{R}_{1\times n}$ нь евклид шугаман огторгуй болно.

Тодорхойлолт. *$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ элементүүдийн хувьд*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \le \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2 \tag{5.20}$$

тэнцэл биш биелнэ. Үүнийг Коши-Буняковскийн тэнцэл биш гэнэ.

Баталгаа. $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ векторуудын аль нэг нь $\mathbf{0}$ (тэг) вектор бол (5.20) биелнэ. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ нь тэгээс ялгаатай векторууд $\forall \lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ бол IV чанараар $(\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \ge 0$ буюу I-III чанараар $\lambda^2\mathbf{x}^2 - 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{y}^2 \ge 0$ болно. Сүүлчийн тэнцэл бишийн зүүн тал нь $\lambda \in \mathbb{R}$-ийн хувьд квадрат гурван гишүүнт байна. Энэ тэнцэл биш биелэх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний дискриминант сөрөг тоо байна.

$$D = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 \le 0 \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \le \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 \qquad \blacktriangle$$

(5.20)-аас

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \sqrt{\mathbf{x}^2} \cdot \sqrt{\mathbf{y}^2} \tag{5.21}$$

гэж бичиж болно.

Тодорхойлолт. *E, E' гэсэн хоёр евклид огторгуй авч үзье. Хэрэв харгалзах шугаман огторгуй нь изоморф ба*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \quad \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in E : \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}', \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{y}' \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$$

байвал E, E' евклид огторгуйнуудыг изоморф гэнэ.

5.8. Векторын норм

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *V шугаман огторгуйн $\mathbf{x}$ вектор бүрд дараах аксиомууд хангах бодит $||\mathbf{x}||$ тоог харгалзуулъя.* $(\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||)$ *Үүнд:*

1. $||\mathbf{x}|| \geq 0 \quad (||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0)$

2. $||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda|||\mathbf{x}||$

3. $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ *(Үүнийг Минковскийн буюу гурвалжны тэнцэл биш гэнэ).*

$||\mathbf{x}||$ *тоог* $\mathbf{x}$ *векторын норм, V шугаман огторгуйг нормчлогдсон шугаман огторгуй гэнэ.*

Жишээ 5.18. Евклид E огторгуй авч үзье. $\forall\mathbf{x} \in E$ бүрд $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ тоог харгалзуулъя (Өөрөөр хэлбэл $\mathbf{x}$-д $\mathbf{x}$-ийн модулийг харгалзуулъя). $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ тоог $\mathbf{x}$ векторын норм болохыг баталъя.

Баталгаа. Үүний тулд $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ тоог $\mathbf{x}$ векторын нормын дээрх 3-н чанарыг хангана гэж харуулна.

1. Скаляр үржвэрийн IV чанараар $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \geq 0$ байна.

2. $\lambda\mathbf{x} \to \sqrt{(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})} = |\lambda|\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$

3. $\sqrt{(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2} \leq \sqrt{\mathbf{x}^2} + \sqrt{\mathbf{y}^2}$ гэж батална. Векторын скаляр үржвэрийн чанараар $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ байх ба $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$. Эндээс $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 \leq \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ байна. (5.21)-ээр $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \sqrt{\mathbf{x}^2} \cdot \sqrt{\mathbf{y}^2}$ байна. Тэгвэл

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 \leq \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + 2\sqrt{\mathbf{x}^2} \cdot \sqrt{\mathbf{y}^2} = (\sqrt{\mathbf{x}^2})^2 + (\sqrt{\mathbf{y}^2})^2 + 2\sqrt{\mathbf{x}^2} \cdot \sqrt{\mathbf{y}^2} \\
&(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 \leq (\sqrt{\mathbf{x}^2} + \sqrt{\mathbf{y}^2})^2 \ \Rightarrow \sqrt{(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2} \leq \sqrt{\mathbf{x}^2} + \sqrt{\mathbf{y}^2}
\end{aligned}$$

ийнхүү 3-р чанар биелэх нь батлагдав. $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ тоо нь $\mathbf{x}$ векторын нормын 3-н аксиомыг хангаж байгаа тул $||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ байна. ▲

Чөлөөт векторуудын хувьд векторын норм нь түүний урттай давхцана. Иймд векторын нормыг векторын урт гэнэ. Цаашид $\mathbf{x}$ векторын нормыг $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ гэж ойлгож тэмдэглэнэ.

5.9. Векторуудын хоорондох өнцөг

Тэгээс ялгаатай векторуудын Коши-Буняковскийн тэнцэл бишээс

$$\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||} \leq 1 \quad \text{буюу} \quad -1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||} \leq 1$$

гэж гарна. Иймд $\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}$ тоог ямар нэг φ өнцгийн косинусаар ойлгож болно.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||}$ $(o \le \varphi \le \pi)$ *байх* φ *өнцгийг* $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ *векторуудын хоорондох өнцөг гэнэ. Хоёр векторын скаляр үржвэр тэгтэй тэнцүү байвал тэдгээр векторуудыг ортогональ векторууд гэнэ.*

Тэг вектор нь дурын вектортай ортогональ байна. Тэгээс ялгаатай $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ векторууд ортогональ байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\cos\varphi = 0$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ байх юм. (φ нь $\mathbf{x}, \mathbf{y}$-ийн хоорондох өнцөг).

M_3 огторгуй дахь ортогональ гэсэн ухагдахуун нь (3.1)-д судалсан ортогональ гэсэн ухагдауунтай давхцаж байна.

5.10. Ортонормчлогдсон суурь

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ $(n \ge 2)$ векторуудын системийн векторууд нь хос хосоороо ортогональ өөрөөр хэлбэл $(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}) = 0$ $(i \ne j)$ бол $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ векторуудын системийг ортогональ гэж нэрлэнэ.

ТЕОРЕМ 5.8. Тэгээс ялгаатай векторуудын ортогональ систем шугаман хамааралгүй байна.

Баталгаа. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ нь тэгээс ялгаатай векторуудын ортогональ систем гэе. Энэ системийг шугаман хамааралтай юм гэе. Тэгвэл

$$\alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{x_n} = 0 \qquad (*)$$

биелэх $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ тоонуудын дотор хаяж нэг нь тэгээс ялгаатай байна. $\alpha_i \ne 0$ гэе. (*) тэнцлийн хоёр талыг $\mathbf{x_i}$-ээр скаляр үржвэр

$$(\mathbf{x_i}, \alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{x_n}) = 0$$

буюу

$$\alpha_1(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_1}) + \alpha_2(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_2}) + \ldots + \alpha_i(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_i}) + \ldots + \alpha_n(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_n}) = 0$$

болно. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ систем ортогональ тул сүүлчийн тэнцлээс $\alpha_i(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_i}) = 0 \Rightarrow \alpha_i||\mathbf{x_i}|| = 0 \Rightarrow ||\mathbf{x_i}|| = 0$ ба $\mathbf{x_i} = \mathbf{0}$ гэж гарна. Энэ нь $\mathbf{x_i}$ тэг вектор биш гэдэгт харшилна. Иймд $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ ортогональ систем нь шугаман хамааралгүй. ▲

ТОДОРХОЙЛОЛТ. n *хэмжээст* $(n \ge 2)$ *евклид огторгуйн суурийн векторууд нь ортогональ систем үүсгэдэг бол* n *хэмжээст евклид огторгуйг ортогональ евклид огторгуй гэнэ.*

Хэрэв $||\mathbf{x}|| = 1$ *бол* $\mathbf{x}$ *векторыг нормчлогдсон буюу нэгж вектор гэнэ.*

Хэрэв $\mathbf{x} \ne 0$ бол $\mathbf{x}^o = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$, $\mathbf{x}^o_1 = -\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$ векторууд нормчлогдсон вектор байна.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. $\mathbf{x}^o, \mathbf{x}_1^o$ *векторыг* $\mathbf{x}$ *векторын нормчлогч вектор гэнэ. Өгсөн векторын нормчлогдсон векторыг олох үйлдлийг өгсөн векторыг нормчлох гэнэ.* $\mu = \pm\frac{1}{||\mathbf{x}||}$*-г нормчлогч үржигдэхүүн гэнэ.*

Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ $(n \geq 2)$ *векторуудын систем нь ортогональ ба вектор бүр нь нормчлогдсон, өөрөөр хэлбэл*

$$(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}) = \begin{cases} 0, & \text{хэрэв } i \neq j \\ 1, & \text{хэрэв } i = j \end{cases} \qquad (i, j = \overline{1, n})$$

бол $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ *системийг ортонормчлогдсон систем гэнэ.*

Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ нь $\mathbf{x_i} \neq \mathbf{0}$ ба ортогональ систем бол энэ системийн вектор бүрийг нормчлоход гарсан систем нь ортогональ байна.

Баталгаа. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ систем ортогональ байх тодорхойлолт ба скаляр үржвэрийн чанараас

$$\left(\frac{\mathbf{x_i}}{||\mathbf{x_i}||}, \frac{\mathbf{x_j}}{||\mathbf{x_j}||}\right) = \frac{1}{||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||}(\mathbf{x_i}, \mathbf{y_j}) = 0 \quad (i \neq j)$$

гэж гарна. Энэ нь $\frac{\mathbf{x_1}}{||\mathbf{x_1}||}, \frac{\mathbf{x_2}}{||\mathbf{x_2}||}, \ldots, \frac{\mathbf{x_n}}{||\mathbf{x_n}||}$ векторуудын систем ортогональ гэдгийг заана. ▲

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хэрэв n хэмжээст $(n \geq 2)$ евклид огторгуйн суурийн векторууд нь ортонормчлогдсон систем үүсгэдэг бол суурийг ортонормчлогдсон суурь гэнэ.*

Нэг хэмжээст огторгуйн тэг биш дурын вектор бүр нь ортогональ суурь үүсгэнэ гэж үздэг. Ортонорчлогдсон сууриар дурын нэгж векторыг авна.

ТЕОРЕМ 5.9. n хэмжээст евклид огторгуй бүрд орто- нормчлогдсон суурь олдоно.

Баталгаа. $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \ldots, \mathbf{g_n}$ евклид огторгуйн ямар нэгэн суурь гэе. $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ldots, \mathbf{f_n}$ векторуудын ортогональ системийг байгуулъя.

$\mathbf{f_1} = \mathbf{g_1}$, $\mathbf{f_2} = \mathbf{g_2} + \lambda_1^{(2)}\mathbf{g_1}$, $\lambda_1^{(2)} \in \mathbb{R}$, $\forall\lambda_1^{(2)} \in \mathbb{R}$-ийн хувьд $\mathbf{f_2} \neq \mathbf{0}$ (Учир нь $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}$ шугаман хамааралгүй).

$(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}) = 0$ байхаар $\lambda_1^{(2)}$-ийг сонгоно. Өөрөөр хэлбэл $(\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2} + \lambda_1^{(2)}\mathbf{g_1}) = 0$ байхаар $\lambda_1^{(2)}$-ийг сонгоно. $(\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2} + \lambda_1^{(2)}\mathbf{g_1}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}) + \lambda_1^{(2)}(\mathbf{g_1}, \mathbf{g_1}) = 0$ $\Rightarrow (\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}) + \lambda_1^{(2)}||\mathbf{g_1}||^2 = 0$, $||\mathbf{g_1}|| \neq 0$ гэдгээс $\lambda_1^{(2)} = \frac{-(\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})}{||\mathbf{g_1}||^2}$ болно.

$\mathbf{f_3}$ векторыг $\mathbf{f_3} = \mathbf{g_3} + \lambda_1^{(3)}\mathbf{f_1} + \lambda_2^{(3)}\mathbf{f_2}$ $(\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)} \in \mathbb{R})$ гэж авъя. Ямар ч $\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}$-ийн хувьд $\mathbf{f_3} \neq \mathbf{0}$.

$\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}$ тоонуудыг $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_3}) = 0$, $(\mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}) = 0$ биелж байхаар сонгоно. Өөрөөр хэлбэл

$$(\mathbf{f_1}, \mathbf{g_3} + \lambda_1^{(3)}\mathbf{f_1} + \lambda_2^{(3)}\mathbf{f_2}) = 0, \quad (\mathbf{f_2}, \mathbf{g_3} + \lambda_1^{(3)}\mathbf{f_1} + \lambda_2^{(3)}\mathbf{f_2}) = 0$$

байхаар $\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}$-ийг сонгоно. Сүүлчийн тэнцлүүдээс

$$(\mathbf{f_1}, \mathbf{g_3}) + \lambda_1^{(3)}(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_1}) + \lambda_2^{(3)}(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}) = 0$$

$$(\mathbf{f_2}, \mathbf{g_3}) + \lambda_1^{(3)}(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}) + \lambda_2^{(3)}(\mathbf{f_2}, \mathbf{f_2}) = 0$$

гэж гарна. $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}) = (\mathbf{f_2}, \mathbf{f_1}) = 0$ ба $||\mathbf{f_1}||^2 \neq 0, \quad ||\mathbf{f_2}||^2 \neq 0$ тул

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(\mathbf{f_1}, \mathbf{g_3})}{||\mathbf{f_1}||^2}, \qquad \lambda_2^{(3)} = -\frac{(\mathbf{f_2}, \mathbf{g_3})}{||\mathbf{f_2}||^2}$$

байна.

Ийм аргаар $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \dots, \mathbf{f_{k-1}}$ векторуудыг сонгосон гэе. $\mathbf{f_k}$ векторыг $\mathbf{f_k} = \mathbf{g_k} + \lambda_1^{(k)}\mathbf{f_1} + \lambda_2^k\mathbf{f_2} + \dots + \lambda_{k-1}^k\mathbf{f_{k-1}}$ гэж сонгоё. Энд $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_{k-1}^k$ тоонууд. $\forall\lambda_j^{(k)} \quad (j = \overline{1, k-1})$-ийн хувьд $\mathbf{f_k} \neq \mathbf{0}$ байна (учир нь $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}, \dots, \mathbf{g_k}$ шугаман хамааралгүй). $\lambda_j^{(k)} \quad (j = \overline{1, k-1})$-г олохдоо $(\mathbf{f_j}, \mathbf{f_k}) = 0, \ ||\mathbf{f_i}||^2 \neq 0$ байхыг ашиглан олбол

$$\lambda_j^{(k)} = -\frac{(\mathbf{f_j}, \mathbf{g_k})}{||\mathbf{f_j}||^2} \quad (j = \overline{1, k-1})$$

байна.

Ингэж байгуулсан $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \dots, \mathbf{f_n}$ гэсэн тэгээс ялгаатай ортогональ системийн вектор бүрийг нормчлож $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ гэсэн ортонормчлогдсон векторуудын системийг гаргаж болно. Энэ ортонормчлогдсон $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ систем нь байгуулалтаар шугаман хамааралгүй. Энэ нь евклид огторгуйн ортонормчлогдсон суурь болно. ▲

Жишээ 5.19. $\mathbb{R}_{1\times 3}$ огторгуйг авч үзье. Энэ огторгуйн сууриар шугаман хамааралгүй $\mathbf{g_1} = [1, -1, 1]$, $\mathbf{g_2} = [2, -3, 4]$, $\mathbf{g_3} = [2, 2, 6]$ векторуудыг авч эдгээрээр ортонормчлогдсон суурь байгуул.

Бодолт. $\mathbf{f_1} = \mathbf{g_1} = [1, -1, 1]$, $\mathbf{f_2} = \mathbf{g_2} + \lambda_1^{(2)}\mathbf{f_1}$ ба

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2})}{||\mathbf{g_1}||^2} = -\frac{2+3+4}{3} = -3$$

Иймд $\mathbf{f_2} = \mathbf{g_2} + (-3)\mathbf{f_1} = [2, -3, 4] - 3[1, -1, 1] = [-1, 0, 1]$, $\mathbf{f_3} = \mathbf{g_3} + \lambda_1^{(3)}\mathbf{f_1} + \lambda_2^{(3)}\mathbf{f_2}$, $\lambda_1^{(3)} = -\frac{(\mathbf{f_1}, \mathbf{g_3})}{||\mathbf{f_1}||^2} = -\frac{2+0+6}{3} = 2$, $\lambda_2^{(3)} = -\frac{(\mathbf{f_2}, \mathbf{g_3})}{||\mathbf{f_2}||^2} = -\frac{-2+0+6}{2} = -2$, $\mathbf{f_3} = \mathbf{g_3} - 2\mathbf{f_1} - 2\mathbf{f_2} = [2, 4, 2]$ $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ векторуудыг нормчилбол

$$\begin{aligned}
\mathbf{e_1} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}[1, -1, 1] = [\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}] \\
\mathbf{e_2} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[-1, 0, 1] = [-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}] \\
\mathbf{e_3} &= \tfrac{1}{2\sqrt{6}}[2, 4, 2] = [\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}]
\end{aligned}$$

Энэ нь $\mathbb{R}_{1\times 3}$ огторгуйн ортонормчлосон суурь.

Санамж. Хэрэв $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ нь ортонормчлогдсон суурь ба $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e_i}$ бол $\alpha_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e_i}),\ (i = \overline{1,n})$ байна. Иймд $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathbf{x}, \mathbf{e_i})\mathbf{e_i}$ байна.

5.11. Векторуудын скаляр үржвэрийг ортонормчлогдсон суурь дахь координатаар нь илэрхийлэх

$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ нь n хэмжээст евклид огторгуйн ортонормчлогдсон суурь гэе. Энэ огторгуйн $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbf{y}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ векторуудыг авч үзье. Тэгвэл

$$\begin{gathered} \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e_1} + \alpha_2 \mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n \mathbf{e_n} \\ \mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{e_1} + \beta_2 \mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n \mathbf{e_n} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e_i} \cdot \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{e_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) \end{gathered}$$

болно. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$-нормчлогдсон тул

$$(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = \begin{cases} 1, & \text{Хэрэв } \ i = j \\ 0, & \text{Хэрэв } \ i \neq j \end{cases}$$

байна. Иймд

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = X^{\mathrm{T}} Y = Y^{\mathrm{T}} X$$

Энд

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Ийнхүү хэрэв векторууд ортонормчлогдсон суурьт координатаараа өгөгдсөн бол тэдгээрийн скаляр үржвэр нь ижил нэрт векторуудын нь үржвэрийн нийлбэр байна.

$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ гэдгээс $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}$ байна. Тэгээс ялгаатай $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ векторын нормчлогч үржигдэхүүн нь $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}}$ байна.

5.12. Унитар огторгуй

V комплекс шугаман огторгуй гэе. Энэ V огторгуйд векторуудын нэмэх, векторыг тоогоор үржүүлэх үйлдлээс гадна дараах чанартай үйлдэл тодорхойлъё.

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ авахад $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ хос вектор бүрд $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ гэсэн комплекс тоог харгалзуулъя. Энэ харгалзаа нь $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ба $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (комплекс тооны олонлог) бүрийн хувьд дараах чанартай. Үүнд:

Чанар 1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ хосмог комплекс тоо, өөрөөр хэлбэл $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\overline{\mathbf{y}, \mathbf{x}})$

Чанар 2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Чанар 3. $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Чанар 4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ тэгэхдээ $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Энэ оруулж буй үйлдлийг комплекс огторгуйн векторуудын эрмит үржих үйлдэл гэж нэрлэнэ. $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$-тоог $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ векторуудын эрмит үржвэр гэж нэрлэдэг.

Тодорхойлолт. *Эрмит үржих үйлдэлтэй комплекс шугаман огторгуйг унитар огторгуй гэнэ.*

I, II чанаруудаас $(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ байх нь мөрдөн гарна.

Жишээ 5.20. $\mathbb{C}^2$ огторгуйд $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ хос вектор бүрд $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ тоог харгалзуулъя. Ийм үржих үйлдэлтэй $\mathbb{C}^2$ огторгуйг унитар огторгуй болохгүйг батал.

Бодолт. I чанар биелэхгүй. Үнэндээ

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2; \quad (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = y_1 x_1 + y_2 x_2 \\
(\overline{\mathbf{y}, \mathbf{x}}) = \overline{y_1 x_1 + y_2 x_2} = \overline{y_1 x_1} + \overline{y_2 x_1} = \overline{y_1 x_1} + \overline{y_2 x_2}
\end{gathered}
$$

тул $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\overline{\mathbf{y}, \mathbf{x}})$

Жишээ 5.21. $\mathbb{C}^2$ огторгуйд $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ хос векторуудад $x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$ тоог харгалзуулбал $\mathbb{C}^2$ нь унитар огторгуй болно.

Бодолт. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$, $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = y_1 x_1 + y_2 \overline{x_2}$

$$
(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{y_1 \overline{x_1} + y_1 \overline{x_2}} = \overline{y_1 \overline{x_1}} + \overline{y_2 \overline{x_2}} = \overline{y_1} \overline{\overline{x_1}} + \overline{y_2} \overline{\overline{x_2}} = \overline{y_1} \cdot x_1 + \overline{y_2} \cdot x_2
$$

Эндээс $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\overline{\mathbf{y}, \mathbf{x}})$ гэж гарч I чанар биеллээ.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ гэсэн дурын гурван векторуудын хувьд

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (x_1 + y_1)\overline{z_1} + (x_2 + y_2)\overline{z_2} : \\
(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = x_1 \overline{z_1} + x_2 \overline{z_2} + y_1 \overline{z_1} + y_2 \overline{z_2} = (x_1 + y_1)\overline{z_1} + (x_2 + y_2)\overline{z_2}
\end{gathered}
$$

болно. Эндээс $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ болж II чанар биелэв.

$(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda x_1\overline{y_1} + \lambda x_2\overline{y_2} = \lambda(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$ III чанар биелдэг нь батлагдав.

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = x_1^2 + y_1^2 \geq 0$$

байх ба $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ тохиолдолд $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ байна. Иймхүү IV чанар биелэв. Эндээс эрмит үржвэр нь $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$ байх $\mathbb{C}^2$ комплекс шугаман огторгуй нь унитар огторгуй байна.

Жишээ 5.22. $\mathbb{C}^2$ комплекс шугаман унитар огторгуйн $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$ гэсэн эрмит үржвэртэй $\mathbf{a}(2, 2-i)$ векторын уртыг ол. Мөн $\mathbf{b}(3+i, 2)$ бол $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ эрмит үржвэрийг ол.

Бодолт. $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 = 2\cdot 2 + (2-i)(2+i) = 9 \Rightarrow ||\mathbf{a}|| = 3$. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 2\overline{(3+i)} + (2-i)\overline{2} = 2(3-i) + (2-i)2 = 10 - 4i$.

Теорем 5.10. Унитар огторгуйн нормчлогдсон суурь дахь хоёр векторын эрмит үржвэр нь нэгдүгээр векторын координатуудыг хоёрдугаар векторын харгалзах координатуудын хосмогоор үржсэн үржвэрийн нийлбэртэй тэнцүү.

Баталгаа. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ нь унитар огторгуйн орто- нормчлогдсон суурь, $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}$, $\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n}$ дурын векторууд гэе. Тэгвэл $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}, \beta_1\mathbf{e_1} + \beta_2\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\mathbf{e_n}) = (\alpha_1\mathbf{e_1}, \sum\limits_{i=1}^{b}\beta_i\mathbf{e_i}) + (\alpha_2\mathbf{e_2}, \sum\limits_{i=1}^{b}\beta_i\mathbf{e_i}) + \ldots + (\alpha_n\mathbf{e_n}, \sum\limits_{i=1}^{b}\beta_i\mathbf{e_i}) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_k\overline{\beta_i}(\mathbf{e_k},\mathbf{e_i}) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{\beta_k}$. ▲

Хэрэв $X = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^{\mathrm{T}}$, $\overline{Y}^{\mathrm{T}} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ бол $X\overline{Y}^{\mathrm{T}} = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{\beta_k}$ байна. Иймд $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = X\overline{Y}^{\mathrm{T}}$.

5.13. Дасгал ба бодлогууд

№1. Бодит тооны олонлог $\mathbb{R}$ нь

а) Бодит шугаман огторгуй

б) Коплекс шугаман огторгуй болж чадах уу?

№2. Комплекс тооны олонлог $\mathbb{C}$ нь

а) Бодит шугаман огторгуй

б) Коплекс шугаман огторгуй болох эсэхийг шалга.

№3. Бүхэл тооны олонлог $\mathbb{Z}$ нь

а) Бодит шугаман огторгуй

б) Коплекс шугаман огторгуй болж чадах эсэхийг тогтоо.

№4. Рациональ тоон олонлог $\mathbb{Q}$ нь

а) Бодит шугаман огторгуй
б) Коплекс шугаман огторгуй болж чадах уу?

№5. Нэг α тооноос тогтох олонлог нь бодит шугаман огторгуй үүсгэдэг бол α тоо ямар тоо байх вэ?

№6. $m \times n$ эрэмбийн бодит матрицуудын олонлог $\mathbb{R}_{m\times n}$ нь
а) Бодит шугаман огторгуй
б) Коплекс шугаман огторгуй болж чадах уу?

№7. $[a_1, a_2]$ хэлбэрийн матрицуудын олонлог M-д нэмэх үйлдлийг матрицын нэмэх үйлдэл, α тоогоор үржүүлэх үйлдлийг $\alpha[a_1, a_2] = [a_1, \alpha a_2]$ гэж тодорхойлбол M нь бодит шугаман огторгуй болж чадах уу?

№8. Ямар нэг шугаман огторгуйн $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ векторуудын систем дараах тохиолдол бүрд шугаман хамааралтай гэдгийг батал.
а) Эдгээр векторуудын систем нь тэг векторыг агуулсан байх
б) Энэ систем дотор хоёр ижил вектор байх.

№9. $\mathbb{R}^n$ огторгуйн векторуудын дараах систем бүр шугаман хамааралгүй байж чадах уу?
а) $(-1, 2, 0, 0)$, $(0, 0, -1, 2)$
б) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
в) $(1, 2)$, $(-1, -2)$.

№10. E_3 огторгуйн векторуудын дараах систем шугаман хамааралгүй байж чадах уу?
а) $\mathbf{a} = 2i + 3j, \quad \mathbf{b} = i + k$
б) $\mathbf{a} = 2i + 3j - k, \quad \mathbf{b} = 4i + 6j - 2k$
в) $\mathbf{a} = 2i + 3j + k, \quad \mathbf{b} = 5j + 3k, \quad \mathbf{c} = 7k$.

№11. $\mathbb{R}^4$ огторгуйн $(2, -1, 7, 10)$ векторын координатыг дараах сууриудаар илэрхийл.
а) $(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1)$
б) $(0, 0, 1, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1), \quad (1, 0, 0, 0)$.

№12. $\mathbb{R}_{2\times 2}$ огторгуйн $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ суурь дахь дараах векторуудын координатыг ол.
а) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

№13. **a, b** векторуудын координат (ямар нэг суурь дахь) өгснөөр **c** векторын (нэг суурь дахь) координатыг ол.
а) $\mathbf{a}(2, 3, -1)$, $\mathbf{b}(0, 1, 2)$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$
б) $\mathbf{a}(0, -5, 1, 4)$, $\mathbf{b}(7, 2, 0, -1)$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

№14. **а)** $\mathbf{a} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурь векторууд өгсөн. **a, b** векторууд суурь үүсгэхийг батал.

б) $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ векторын $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ сууръ дахь координатыг ол.

№15. Дараах векторууд (ямар суурь дахь) шугаман хамааралтай юу?

а) $\mathbf{a}_1(2,1,0)$, $\mathbf{a}_2(-6,2,0)$, $\mathbf{a}_3(2,-4,2)$

б) $\mathbf{a}_1(1,-1,0,1)$, $\mathbf{a}_2(2,3,-1,0)$, $\mathbf{a}_3(4,0,0,-1)$.

№16. $\mathbf{a}_4$ вектор бусад (үлдсэн) векторуудынхаа шугаман эвлүүлэг болж чадах уу?

а) $\mathbf{a}_1(-2,1,0)$, $\mathbf{a}_2(3,-1,1)$, $\mathbf{a}_3(2,0,-2)$, $\mathbf{a}_4(1,1,1)$

б) $\mathbf{a}_1(1,1,1)$, $\mathbf{a}_2(2,2,2)$, $\mathbf{a}_3(0,-1,1)$, $\mathbf{a}_4(2,-1,3)$.

№17. Хэрэв $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ векторуудын координатууд өгсөн бол $\mathbf{b}(1,\lambda)$ вектор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$-аар шугаман илэрхийлэгдэж байхаар λ-ийн бүх утгыг ол.

а) $\mathbf{a}_1(2,1)$, $\mathbf{a}_2(-1,3)$ **б)** $\mathbf{a}_1(2,1)$, $\mathbf{a}_2(4,2)$.

№18. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}$ (нэг суурьт) векторууд өгчээ. $\mathbf{b}$ вектор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ векторуудаар шугаман илэрхийлэгдэж байх λ-ийн бүх утгыг ол.

а) $\mathbf{a}_1(2,3,0)$; $\mathbf{a}_2(1,36,0)$, $\mathbf{a}_3(-1,2,0)$, $\mathbf{b}(0,\lambda,5)$

б) $\mathbf{a}_1(1,2,4)$, $\mathbf{a}_2(2,1,5)$, $\mathbf{a}_3(3,-1,5)$, $\mathbf{b}(1,\lambda,\lambda)$.

№19. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ сууриас $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ суурьт шилжих шилжилтийн матрицыг ол.

№20. Дараах матрицууд нэг сууриас нөгөө өөр суурьт шилжих матриц болж чадах уу?

а) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

№21. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ сууриас $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ суурьт шилжих шилжилтийн матриц нь

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

бол $\mathbf{e}'_2$ векторын $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ суурь дахь, $\mathbf{e}_1$ векторын $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ суурь дахь координатуудыг ол.

№22. Хэрэв $\mathbf{e}_1{}' = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2{}' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ бол $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ сууриас $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ суурьт шилжих шилжилтийн матрицыг ол.

№23. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ суурь дахь $\mathbf{x}$ векторын координатуудаар түүний $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ суурь дахь координатыг ол.

а) $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_1 = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

б) $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_1 = 3\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

№24. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ суурь дахь $\mathbf{x}(-1,2,7)$ векторын координатаар түүний $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ суурь дахь координатыг ол.

$\mathbf{e}_1{}' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2{}' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$.

№25. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ векторуудын систем суурь үүсгэхийг баталж, энэ суурь дахь $\mathbf{a}$ векторын координатыг ол.

а) $\mathbf{a_1}(1,2)$, $\mathbf{a_2}(-1,4)$, $\mathbf{a}(3,-7)$

б) $\mathbf{a_1}(1,2,3)$, $\mathbf{a_2}(-1,4,0)$, $\mathbf{a_3}(1,0,0)$, $\mathbf{a}(5,2,-6)$.

№26. E^n евклид огторгуйн векторууд өгчээ. Эдгээр векторуудын урт, скаляр үржвэр, тэдгээрийн хоорондох өнцгийг ол.

а) $\mathbf{a}(1,-2,3)$, $\mathbf{b}(3,0,-4)$ б) $\mathbf{a}(1,-3,0,2)$, $\mathbf{b}(0.5,-12,0)$.

№27. E^3 евклид огторгуйн дараах векторуудын систем ортогональ эсэхийг шалга.

а) $(0,1,1)$, $(0,-1,3)$ б) $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.

№28. E^3 евклид огторгуйд өгсөн суурь ортонормчлогдсон суурь байгуул.

а) $\mathbf{g_1}=(1,2,3)$, $\mathbf{g_2}=(0,2,0)$, $\mathbf{g_3}=(0,0,3)$

б) $\mathbf{g_1}=(1,0,0)$, $\mathbf{g_2}=(0,1,-1)$, $\mathbf{g_3}=(1,1,1)$.

№29. Шугаман хамааралтай, харилцан ортогональ векторуудын жишээ гарга.

№30. Ортонормчлогдсон суурь үүсгэх $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4},\mathbf{e_5}$ векторууд өгчээ. $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ба $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{y}|$-г ол.

а) $\mathbf{x}=\mathbf{e_1}-2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_5}$, $\mathbf{y}=3\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}-\mathbf{e_4}+2\mathbf{e_5}$

б) $\mathbf{x}=2\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}-3\mathbf{e_3}$, $\mathbf{y}=\mathbf{e_5}-2\mathbf{e_3}$

в) $\mathbf{x}=5\mathbf{e_1}-3\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}+4\mathbf{e_4}$, $\mathbf{y}=2\mathbf{e_2}-\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4}$.

№31. Ортогональ суурь үүсгэх $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}$ векторууд өгчээ. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ векторуудын хоорондох өнцгийг ол.

а) $\mathbf{x}=\mathbf{e_1}-2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4}$, $\mathbf{y}=\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3}-\mathbf{e_4}$,
$|\mathbf{e_1}|=3$, $|\mathbf{e_2}|=2$, $|\mathbf{e_3}|=1$, $|\mathbf{e_4}|=2$

б) $\mathbf{x}=2\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$, $\mathbf{y}=\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}-\mathbf{e_4}$, $|\mathbf{e_1}|=2$,
$|\mathbf{e_2}|=3$, $|\mathbf{e_3}|=3$, $|\mathbf{e_4}|=\sqrt{2}$.

№32. $\mathbb{R}^2$ огторгуйд $\mathbf{a}(\sqrt{x},\sqrt{y})$ ба $\mathbf{b}(\sqrt{y},\sqrt{x})$, $x,y\geq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ векторууд авч үзье. Коши-Буняковскийн тэнцэл бишийг ашиглан

$$\sqrt{xy}\leq\frac{(x+y)}{2}$$

болохыг батал. Хэдийд тэнцүү байх вэ?

№33. Үл бөхөх A матрицын i-р мөр нь A^{-1} матрицын j-р баганатай $(i\neq j)$ ортогональ болохыг батал.

№34. $\mathbb{R}^3$ огторгуйд (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) гэсэн коллинеар биш хоёр векторуудтай ортогональ байх бүх векторуудыг ол.

№35. Бодит шугаман огторгуйн хоёр вектороос тогтсон олонлог түүний дэд огторгуй болохгүй гэдгийг батал.

№36. $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ векторууд шугаман хамааралгүй бол $\mathbf{u}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}=\mathbf{x}+\mathbf{z}$, $\mathbf{w}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$ векторууд шугаман хамааралгүй гэдгийг батал.

№37. $L=\{(a,a,b)\mid\forall a,b\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$ бол энэ огторгуйн ялгаатай хоёр суурийг заа.

Хариу

1. а) мөн, **б)** биш **2. а)** мөн, **б)** мөн **3. а)** биш, **б)** биш **4. а)** биш, **б)** биш **5.** $a = 0$ **6. а)** гадна, **б)** биш **7.** үгүй **9. а)** үгүй, **б)** биш, **в)** мөн **10. а)** чадна, **б)** чадахгүй, **в)** чадна **11. а)** $\{2, -1, 7, 10\}$, **б)** $\{7, -1, 10, 2\}$ **12. а)** $\{-5, 2, 1, 3\}$, **б)** $\{4, 0, -2, 7\}$ **13. а)** $\mathbf{c}(4, 9, 4)$, **б)** $\mathbf{c}(-7, -7, 1, 5)$ **14.** $\mathbf{c}(\frac{11}{7}, -\frac{1}{7})$ **15. а)** үгүй, **б)** тийм **16. а)** чадна, **б)** үгүй **17. а)** λ дурын утга, **б)** $\lambda = \frac{1}{2}$ **18. а)** $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, **б)** Ямар ч λ-ийн хувьд шугаман илэрхийлэгдэхгүй. **19.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **20. а)** чадахгүй, **б)** чадна **21.** $\mathbf{e}'_{\mathbf{2}}(0, -1, 4)$, $\mathbf{e}'_{\mathbf{1}}(-1, -2, \frac{13}{6})$ **22.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **23. а)** $\mathbf{x}(\frac{5}{2}, -\frac{19}{2})$, **б)** $\mathbf{x}(3, \text{-}7)$ **24.** $\mathbf{x}(\frac{17}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{16}{3})$ **25. а)** $\mathbf{a}(\frac{5}{6}, -\frac{13}{6})$ **б)** $\mathbf{a}(-2, \frac{3}{2})$ **26. а)** $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -9$, $\varphi = \arccos(-\frac{9}{5\sqrt{14}})$, **б)** $|\mathbf{a}| = 14$, $|\mathbf{b}| = 13$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -15$, $\varphi = \arccos(-\frac{15}{13\sqrt{14}})$ **27. а)** биш, **б)** мөн **28. а)** $(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}})$, $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}})$, **б)** $(1, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ **30. а)** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{6}$, $|\mathbf{y}| = \sqrt{15}$, **б)** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 6$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{22}$, $|\mathbf{y}| = \sqrt{5}$, **в)** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -3$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{51}$, $|\mathbf{y}| = \sqrt{6}$ **31. а)** $\arccos(-\frac{\sqrt{10}}{6})$, **б)** $\frac{\pi}{2}$

34. $\{(k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}) | \forall k \in \mathbb{R}\}$ **37. а)** $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, **б)** $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$.

VI бүлэг. Шугаман оператор

6.1. Шугаман операторын тодорхойлолт

Хэмжээсүүд нь m, n байх V, W гэсэн бодит (комплекс) шугаман огторгуйнууд өгсөн байг.

Тодорхойлолт. *$\forall \mathbf{x} \in V$ вектор (элемент)-ыг W-ийн цор ганц $\mathbf{y}$ вектор (элемент)-т харгалзуулах f харгалзааг V огторгуйг W огторгуйд буулгах буулгалт буюу V-ээс W-д үйлчлэх оператор гэж нэрлээд, $f : V \to W$ гэж тэмдэглэнэ. $\mathbf{y}$ векторыг $\mathbf{x}$ векторын дүр, $\mathbf{x}$ векторыг $\mathbf{y}$ векторын эх дүр гэнэ. Энэ тохиолдолд f оператор $\mathbf{x}$ векторыг $\mathbf{y}$ векторт шилжүүллээ гэх ба $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ гэж бичнэ.*

Операторын тодорхойлолтоос харахад вектор бүр ганц дүртэй, харин вектор бүр эх дүртэй байх албагүй. Хэрэв вектор нь эх дүртэй бол тэр нь нэг байх албагүй байна.

Тодорхойлолт. *$f : V \to W$, $q : V \to W$ хоёр буулгалтын хувьд $\forall \mathbf{x} \in V$: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ байвал f, g буулгалтуудыг тэнцүү буулгалт гэнэ.*

Вектор бүр нь цор ганц эх дүртэй байх буулгалтыг харилцан нэг утгатай буулгалт (биекц) гэнэ.

Хэрэв f хувиргалт, V огторгуйн дурын вектор ба дурын тоо λ (бодит ба комплекс)-ийн хувьд

1. $f(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2})$

2. $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$

нөхцөл биелж байвал f хувиргалтыг шугаман хувиргалт гэнэ.

Энэ тодорхойлолтоос f шугаман хувиргалтын хувьд

$$f(\alpha \mathbf{x_1} + \beta \mathbf{x_2}) = \alpha f(\mathbf{x_1}) + \beta f(\mathbf{x_2}) \tag{6.1}$$

тэнцэл биелэх нь харагдаж байна. Энд α, β нь (бодит буюу комплекс) дурын тоонууд. Үүний урвуу нь:

Хэрэв (6.1) тэнцэл биелж байвал f нь шугаман байна.

Баталгаа. (6.1)-д $\alpha = 1$, $\beta = 1$ тавибал (6.1) нь

$$f(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2})$$

болно. Хэрэв (6.1)-д $\beta = 0$ гэж авбал (6.1) нь

$$f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$$

болно. Шугаман хувиргалтын хоёр нөхцөл биелэв. ▲

Шугаман хувиргалт нь тэг векторыг тэг векторт шилжүүлнэ. Энэ нь дараах тэнцлээс харагдана.

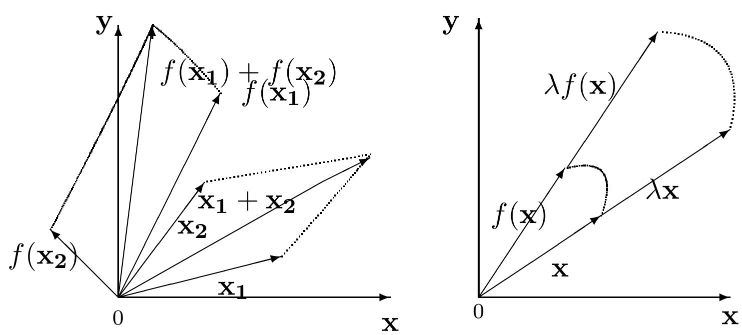
$$f(\mathbf{O}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$$

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хэрэв W огторгуйн нь V огторгуйтай давхцвал V-ээс W-т үйлчлэх f опеаторыг V огторгуйн оператор буюу хувиргалт гэнэ.*

Хэрэв f хувиргалт нь вектор бүрийг өөрийг нь өөрт нь шилжүүлж байвал өөрөөр хэлбэл $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$; $\forall \mathbf{x} \in V$ байвал адилтгал хувиргалт гэнэ. Адилтгал хувиргалт бүхэн шугаман байна.

ЖИШЭЭ 6.1. Хавтгайн векторуудын шугаман огторгуй M_2-д дараах хувиргалтыг тодорхойлъё. M_2-ийн $\mathbf{x}$ вектор бүрд түүнийг φ өнцгөөр (нэг ижил) эргүүлэхэд гарах $f(\mathbf{x})$ векторыг хэргалзуулъя. Энэ хувиргалт нь шугаман хувиргалт болно (зураг 75).

$$f(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}) = f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2})$$



Зураг 75

ЖИШЭЭ 6.2. Чөлөөт векторуудын шугаман огторгуй M_3-ийн $\mathbf{x}$ вектор бүрийг $|\mathbf{x}|\mathbf{x}$ векторт шилжүүлэх хувиргалт f нь шугаман биш гэдгийг харуулъя.

$$f(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}) = |\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}|(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})$$

$$f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2}) = |\mathbf{x_1}|\mathbf{x_1} + |\mathbf{x_2}|\mathbf{x_2}$$

гэдгийг харьцуулан үзвэл $f(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}) \neq f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2})$ байгаа тул ийм f хувиргалт нь шугаман биш байна.

V шугаман огторгуйн шугаман хувиргалт f нь V огторгуйн нэг суурийн $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ векторуудыг харгалзан $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}$ векторуудад шилжүүлдэг байг. Өөрөөр хэлбэл

$$\mathbf{e'_1} = f(\mathbf{e_1}), \quad \mathbf{e'_2} = f(\mathbf{e_2}), \quad \ldots, \quad \mathbf{e'_n} = f(\mathbf{e_n})$$

байг. Тэгвэл V огторгуйн дурын $\mathbf{x}$ векторын дүр нь суурийн векторуудын дүрүүдээр илэрхийлэгдэнэ. Энэ нь дараах тэнцлээс харагдана.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n} \\ f(\mathbf{x}) = f(\alpha_1\mathbf{e_1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}) &= \alpha_1 f(\mathbf{e_1}) + \ldots + \alpha_n f(\mathbf{e_n}) = \\ &= \alpha_1\mathbf{e'_1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e'_n} \end{aligned}$$

байна. Эндээс огторгуйн суурийн векторуудын дүрүүд өгснөөр V огторгуйн шугаман хувиргалт бүрэн тодорхойлогдох нь харагдаж байна.

6.2. Шугаман хувиргалтын матриц

V огторгуйн $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурийн векторуудыг харгалзан $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}$ векторуудад шилжүүлэх шугаман хувиргалтыг f гэе. $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}$ векторууд нь суурийн векторуудаар

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e'_1} = a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2} + \ldots + a_{n1}\mathbf{e_n} \\ f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e'_2} = a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2} + \ldots + a_{n2}\mathbf{e_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\mathbf{e_n}) = \mathbf{e'_n} = a_{1n}\mathbf{e_1} + a_{2n}\mathbf{e_2} + \ldots + a_{nn}\mathbf{e_n} \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

шугаман илэрхийлэгдэнэ.

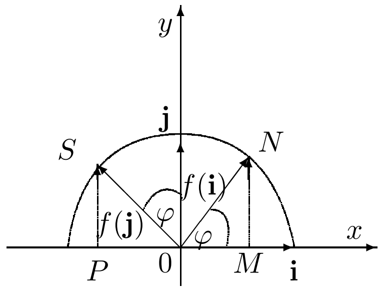
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицыг $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ *сууръ дахь* f *шугаман хувиргалтын матриц гэнэ.* A матрицын i-р багана нь $f(\mathbf{e_i})$ векторын $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ сууръ дахь координат байна. Ингэж (өгсөн суурьт) шугаман хувиргалт бүрд матриц харгалзан байна. Үүний урвуу нь n эрэмбийн матриц бүрд n хэмжээст огторгуйн шугаман хувиргалт харгалзана гэдэг нь үнэн.

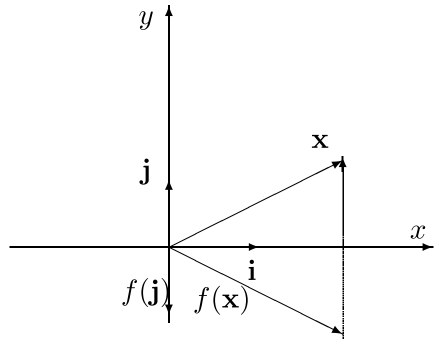
(6.2) системийг матрицан хэлбэрээр

$$[f(\mathbf{e_1})\ f(\mathbf{e_2})\ \ldots\ f(\mathbf{e_n})] = [\mathbf{e_1}\ \mathbf{e_2}\ \ldots\ \mathbf{e_n}]A \tag{6.3}$$

гэж бичнэ.



Зураг 76



Зураг 77

Жишээ 6.3. M_2 огторгуйд φ өнцгөөр эргүүлэх хувиргалтыг авч үзье. Энэ хувиргалтын $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ суурь дахь матрицыг бич.

Бодолт. 76-р зургаас

$$f(\mathbf{i}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \mathbf{i} \cdot \cos\varphi + \mathbf{j} \cdot \sin\varphi$$
$$f(\mathbf{j}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = -\mathbf{i} \cdot \sin\varphi + \mathbf{j} \cdot \cos\varphi$$

байна. Иймд φ өнцгөөр эргүүлэх хувиргалтын $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ суурь дахь матриц

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

байна.

Жишээ 6.4. M_2 огторгуйн дурын $\mathbf{x}$ векторыг түүнтэй OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй векторт шилжүүлэх хувиргалт f шугаман болох нь илэрхий. Түүний $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ суурь дахь матрицыг бич.

Бодолт. 77-р зургаас $f(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, $\;f(\mathbf{j}) = -\mathbf{j}$ байна. Иймээс

$$f(\mathbf{i}) = 1 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$$
$$f(\mathbf{j}) = 0 \cdot \mathbf{i} + (-1) \cdot \mathbf{j}$$

байх ба олох матриц нь

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

байна.

Адилтгал хувиргалтын матриц нь нэгж матриц байна. Урвуугаар n эрэмбийн нэгж матриц бүхэнд n хэмжээст шугаман огторгуйн адилтгал хувиргалт харгалзана.

6.3. Вектор ба түүний дүрийн координатуудын хоорондох холбоо

$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурь дахь $\mathbf{x}$ вектор бүр $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координаттай. Өөрөөр хэлбэл $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \ldots + x_n\mathbf{e_n}$ гэе.

$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицтай f шугаман хувиргалт авч үзье. $f(\mathbf{x})$ векторын $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурь дахь координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ийг олъё.

$$f(\mathbf{x}) = y_1\mathbf{e_1} + y_2\mathbf{e_2} + \ldots + y_n\mathbf{e_n} = [\mathbf{e_1}\ \mathbf{e_2}\ \ldots\ \mathbf{e_n}] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

байна. Нөгөө талаас

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e_1} + \ldots + x_n\mathbf{e_n}) = x_1 f(\mathbf{e_1}) + \ldots + x_n f(\mathbf{e_n}) = \\ &= [f(\mathbf{e_1})\ f(\mathbf{e_2})\ \ldots\ f(\mathbf{e_n})] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

байна. (6.3) тэнцлийг энд хэрэглэвэл

$$f(\mathbf{x}) = [\mathbf{e_1}\ \mathbf{e_2}\ \ldots\ \mathbf{e_n}] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

болно. (6.4), (6.5) тэнцлүүдээс

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{буюу} \quad Y = AX \tag{6.6}$$

Энд $Y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^{\mathrm{T}}$, $X = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^{\mathrm{T}}$

Хэрэв f нь ямар нэг суурьт A матрицтай ба $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ шугаман хувиргалт бол $Y = AX$ байна.

(6.6) тэнцлийг шугаман хувиргалтын тодорхойлолтын 1), 2) нөхцөлд хэрэглэвэл

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2, \quad A(\lambda X) = \lambda(AX)$$

гэж 1), 2) нөхцлийг бичнэ.

Жишээ 6.5. Хоёр хэмжээст огторгуйн $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьд

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

матрицтай f шугаман хувиргалт өгчээ. $\mathbf{x} = 4\mathbf{e_1} - 3\mathbf{e_2}$ векторын дүр $f(\mathbf{x})$-ийг ол.

Бодолт. $f(\mathbf{x})$-ийн координатыг y_1, y_2 гэе. (6.6) томъёогоор

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -19 \end{bmatrix}$$

болох ба $f(\mathbf{x}) = 6\mathbf{e_1} - 19\mathbf{e_2}$ байна.

6.4. Шинэ суурьт шилжүүлэх шугаман хувиргалтын матриц

Теорем 6.1. Хэрэв дурын багана матриц $X = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^{\mathrm{T}}$-ийн хувьд

$$AX = BX \tag{6.7}$$

(энд $A_{m\times m} = (a_{ij}),\quad B_{m\times m} = (b_{ij})$) тэнцэл биелж байвал $A = B$ байна.

Баталгаа. (6.7) тэнцэл нь дурын X-ийн хувьд биелдэг гэдгээс (6.7) нь $X = [10\dots0]^{\mathrm{T}}$-ийн хувьд

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

болно. Эндээс

$$[a_{11}\ a_{21}\ \dots\ a_{m1}]^{\mathrm{T}} = [b_{11}\ b_{21}\ \dots\ b_{m1}]^{\mathrm{T}}$$

ба $a_{11} = b_{11}, \quad a_{21} = b_{21}, \quad \ldots, a_{m1} = b_{m1}$ болно. Бусад элементүүдийн хувьд үүнтэй адилаар тэнцүү байхыг батлана. Тухайлбал A матрицын i-р баганыг W-ийн i-р баганатай тэнцүү гэдгийг батлахын тулд (6.7)-д X-ээр i-р мөр дээрээ 1 бусад элементүүд нь тэгтэй тэнцүү байх $X = [0\ 0\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 0]$ матрицыг авна. ▲

Теорем 6.2. Хэрэв дурын $X = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_m]$ матрицын хувьд $XA = XB$ (энд A, W нь m эрэмбийн квадрат матриц) биелж байвал $A = B$ байна.

Баталгааг теорем 6.1-ийн адилаар гүйцэтгэнэ.

Теорем 6.3. Хэрэв

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n} \tag{6.8}$$

$$\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n} \tag{6.9}$$

нь ямар нэг шугаман огторгуйн сууриуд ба A нь f шугаман хувиргалтын (6.8) суурь дахь матриц бол (6.9) суурь дахь энэ хувиргалтын матриц нь $B = T^{-1}AT$ хэлбэртэй байна. Энд T нь (6.8) сууриас (6.9) суурьт шилжих шилжилтийн матриц.

Баталгаа. $\mathbf{x}$ вектор (6.8) суурьт $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (6.9) суурьт $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ координаттай, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ вектор (6.8) суурьт $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, (6.9) суурьт $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ гэсэн координаттай юм гэе. Тэгвэл

$$X = TX' \tag{6.10}$$

$$Y = TY' \tag{6.11}$$

$$Y = AX \tag{6.12}$$

$$Y' = BX' \tag{6.13}$$

байна. (6.10)-ийн зүүн талаас нь A матрицаар үржвэл $AX = ATX'$ болох ба (6.11), (6.12)-ийг анхаарвал $TY' = ATX'$ болно. Эндээс $Y' = (T^{-1}AT)X'$ болно. Теорем 6.1 ба (6.13)-ыг сүүлчийн тэнцэлд хэрэглэвэл $B = T^{-1}AT$ байна. ▲

Мөрдлөгөө 1. Хэрэв шугаман хувиргалт нь ямар нэг суурьт үл бөхөх матрицтай бол дурын өөр суурийн үед энэ хувиргалтын матриц нь мөн үл бөхөх байна.

Баталгаа. f хувиргалтын хоёр суурь дахь матрицуудыг A, B гэе. $\det A \neq 0$. Теорем 6.3-аар $B = T^{-1}AT$ байна. Шилжилтийн матриц T нь үл бөхөх учраас $\det B \neq 0$. $\det B = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T \neq 0 \ \Rightarrow B$ үл бөхөх матриц. ▲

Мөрдлөгөө 2. Хэрэв A, W нь f шугаман хувиргалтын өөр өөр суурь дахь матрицууд бол $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ байна.

Баталгаа. Теорем 1.13-ыг $B = T^{-1}AT$-д хэрэглэвэл $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$ ▲

Жишээ 6.6. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт f хувиргалт

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

матрицтай бол $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} \quad \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ суурь дахь f хувиргалтын матрицыг ол.

Бодолт. Сууриас суурьт шилжих шилжилтийн матриц нь

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Тэгвэл

$$T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

6.5. Шугаман хувиргалтын утгын муж ба цөм

Тодорхойлолт. *$f : V \to W$ хувиргалтын үед W-ийн тэг векторт шилжих V-ийн векторуудын олонлогийг f хувиргалтын цөм гэнэ.*

f хувиргалтын цөмийг $\ker f$ гэж тэмдэглэвэл

$$\ker f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

байна.

$f : V \to W$ хувиргалтаар V-ийн дор хаяж нэг векторын дүр болж байх W-ийн векторуудын олонлогийг f хувиргалтын утгын муж гэнэ. f хувиргалтын утгын мужийг Jmf гэж тэмдэглэвэл

$$Jmf = \{\mathbf{y} \in W \mid \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$$

Дараах өгүүлбэрүүдийг баталъя.

1. $f : V \to V$ шугаман хувиргалтын цөм нь V-ийн дэд огторгуй байна.

Баталгаа. f шугаман хувиргалт гэдгээс $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ байна. Иймд $\ker f \neq$ $\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \ker f$ бол $f(\mathbf{x_1}) = f(\mathbf{x_2}) = \mathbf{0}$ байна.

$$f(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \in \ker f$$

$$f(\lambda \mathbf{x_1}) = \lambda f(\mathbf{x_1}) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda \mathbf{x_1} \in \ker f$$

Иймээс $\ker f$ нь V-ийн дэд огторгуй байна. ▲

2. $f : V \to V$ шугаман хувиргалтын утгын муж нь V огторгуйн дэд огторгуй болно.

3. $f : V \to V$ хувиргалтын цөм $\ker f$ нь зөвхөн ганц тэг вектороос тогтох зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь f хувиргалт биекц байх юм. Өөрөөр хэлбэл

$$\ker f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow f : V \to V - \text{биекц}$$

2, 3-р өгүүлбэрүүдийн баталгааг суралцагчдад бие даан хийлгэхээр орхив.

$\dim \ker f$-ийг f хувиргалтын дефект, $\dim Jmf$-ийг f хувиргалтын ранг гэнэ.

Теорем 6.4. Хэрэв $f : V \to V$ бол

$$\dim Jmf = \operatorname{rang} A, \quad \dim \ker f = n - \operatorname{rang} A.$$

Энд A нь f хувиргалтын матриц $n = \dim V$.

Баталгаа. **1)** $\mathbf{y} \in Jmf$ бол $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ байх $\mathbf{x} \in V$ олдоно. Энэ нь

$$AX = Y \tag{6.14}$$

X, Y нь харгалзан $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ векторуудын координатын багана матриц (6.14) систем нийцтэй бол $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r$. Иймд Y багана нь A матрицын суурь багануудын шугаман эвлүүлэг байна. Ингэж $\forall \mathbf{y} \in Jmf$ нь шугаман хамааралгүй r тооны векторуудын шугаман эвлүүлэг болно. Энэ нь $\dim Jmf = r = \operatorname{rang} A$ гэсэн үг.

2) $\forall \mathbf{x} \in \ker f \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ буюу $AX = \mathbf{0}$. Энэ нь $\ker f$ нь $AX = 0$ системийн шийдийн огторгуй болж байна гэсэн үг. Иймд $\dim \ker f = n - r$ байна. ▲

Энэ баталсан теоремоос

$$\dim Jmf + \dim \ker f = \dim V, \qquad (f : V \to V)$$

гэж мөрдөн гарна.

6.6. Шугаман хувиргалтын тодорхойлогч тэгшитгэл

Теорем 6.5. Хэрэв

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n} \tag{6.15}$$

суурьт f шугаман хувиргалт нь A матрицтай,

$$\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n} \tag{6.16}$$

суурьт B матрицтай бол $\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E)$ байна. Энд λ дурын тоо, E нь n эрэмбийн нэгж матриц.

Баталгаа. (6.15) сууриас (6.16) суурьт шилжих шилжилтийн матрицыг T гэе. Теорем 6.3-аар $B = T^{-1}AT$ байна. Иймд $\det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det[T^{-1}(A - \lambda E)T] = \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det T = \det(A - \lambda E)$ ▲.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. $\det(A - \lambda E)$ *нь λ-ийн хувьд n зэргийн олон гишүүнт байна. Энэ олон гишүүнтийг A матрицын тодорхойлогч олон гишүүнт буюу f хувиргалтын тодорхойлогч олон гишүүнт гэнэ.*

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{6.17}$$

тэгшитгэлийг f шугаман хувиргалтын (ямар нэг суурь дахь) тодорхойлогч тэгшитгэл гэнэ. Энд A нь f хувиргалтын (ямар нэг суурь дахь) матриц.

(6.17) тэгшитгэлийг мөн A матрицын тодорхойлогч тэгшитгэл, харин түүний шийдүүдийг шугаман хувиргалтын (A матрицын) тодорхойлогч тоонууд гэнэ.

Нэг сууриас нөгөө суурьт шилжихэд шугаман хувиргалтын матриц өөрчлөгдөнө. Харин тодорхойлогч олон гишүүнт өөрчлөгдөхгүй (дээрх теоремоос) өөрөөр хэлбэл тодорхойлогч олон гишүүнт суурийн сонголтоос хамаарахгүй.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Шугаман хувиргалтын бүх тодорхойлогч тоонуудын системийг түүний спектор гэнэ.*

Тодорхойлогч тоо бүр спекторт давталтынхаа тоогоор орсон байна. Өөрөөр хэлбэл (6.17) тэгшитгэлд давхардсан шийдүүд байвал тэд бүгдээрээ спекторт орно.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хэрэв f хувиргалтын тодорхойлогч олон гишүүнт энгийн язгууртай байвал энэ f хувиргалтын спекторыг энгийн гэнэ.*

f шугаман хувиргалт ямар нэг суурьт

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицтай гэе. Энэ хувиргалтын тодорхойлогч тэгшитгэл нь

$$\det\left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

буюу

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

хэлбэртэй байна.

Жишээ 6.7.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

матрицын тодорхойлогч олон гишүүнт ба тодорхойлогч тоог ол.

Бодолт. Энэ матрицын тодорхойлогч олон гишүүнт нь

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -\lambda & -3 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

байна. Тодорхойлогч тоонуудыг олохын тулд

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

тэгшитгэл бодно. Энэ тэгшитгэлийг

$$(\lambda^3 - \lambda^2) - (4\lambda^2 - 4\lambda) + (4\lambda - 4) = 0$$

буюу $(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$ гэж бичнэ. Энэ тэгшитгэлийн шийд $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ тоонууд нь A матрицын тодорхойлогч тоонууд (спектор) юм.

6.7. Шугаман хувиргалтын үржвэр

$\mathbf{x}$ вектор бүрд f хувиргалт хэрэглэн $\mathbf{y}$ векторт шилжүүлдэг, $\mathbf{y}$ векторт g шугаман хувиргалт хэрэглэн $\mathbf{z}$ векторт шилжүүлдэг гэе. Энэ тохиолдолд $\mathbf{x}$ векторт f, g хувиргалтуудыг дараалан хэрэглэж $\mathbf{z}$ векторыг гаргалаа гэнэ.

Тодорхойлолт. *V шугаман огторгуйд үйлчилж байгаа f, g хувиргалтуудын хувьд*

$$g \cdot f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) \qquad \forall \mathbf{x} \in V$$

гэж тодорхойлогдох $g \cdot f$ хувиргалтыг f, g хувиргалтуудын үржвэр (композици) гэнэ.

$f \cdot g$ хувиргалт $\forall \mathbf{x} \in V: \ f \cdot g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ гэж тодорхойлогдоно.

Теорем 6.6. Шугаман хувиргалтуудын үржвэр шугаман хувиргалт байна.

Баталгаа. f, g нь ямар нэг огторгуйн шугаман хувиргалт юм гэе. Тэгвэл энэ огторгуйн дурын $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ векторуудын хувьд

$$f(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = \alpha f(\mathbf{x_1}) + \beta f(\mathbf{x_2})$$

$$g(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = \alpha g(\mathbf{x_1}) + \beta g(\mathbf{x_2})$$

байна. $\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}$ векторт g, f хувиргалтуудыг дараалан хэрэглэвэл

$$g \cdot f(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = g \cdot (\alpha f(\mathbf{x_1}) + \beta f(\mathbf{x_2})) =$$
$$= \alpha g \cdot (f(\mathbf{x_1})) + \beta g \cdot (f(\mathbf{x_2})) = \alpha g \cdot f(\mathbf{x_1}) + \beta g \cdot f(\mathbf{x_2})$$

болно. Ийнхүү

$$g \cdot f(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = \alpha g \cdot f(\mathbf{x_1}) + \beta g \cdot f(\mathbf{x_2})$$

болж $g \cdot f$ нь шугаман хувиргалт болох нь батлагдав. ▲

Теорем 6.7. Хэрэв f, g шугаман хувиргалтууд нь ямар нэг суурьт харгалзан A, B матрицуудтай бол $g \cdot f$ хувиргалт нь тэр суурьт BA матрицтай байна.

Баталгаа. $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = g(\mathbf{y})$ гэе. Тэгвэл $\mathbf{z} = g \cdot f(\mathbf{x})$ байх ба эндээс

$$Y = AX \qquad Z = BY \tag{6.18}$$

$$Z = CX \tag{6.19}$$

байна. Энд S нь $g \cdot f$ хувиргалтын өгсөн суурь дахь матриц.
(6.18)-аас

$$Z = BAX \tag{6.20}$$

гэж олдоно. (6.19), (6.20) жишиж үзвэл $C = BA$. ▲

Жишээ 6.8. f, g шугаман хувиргалтууд нь харгалзан

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

матрицуудтай бол $g \cdot f, \quad f \cdot g$ хувиргалтуудын матрицуудыг ол.

Бодолт. $g \cdot f, \quad f \cdot g$ хувиргалтуудын матрицуудыг харгалзан C, D гэж тэмдэглэе. Теорем 6.7-оор $C = BA$, $D = AB$ байна. Тэгвэл

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 0 \\ 18 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

6.8. Шугаман хувиргалтын нийлбэр

Ямар нэг огторгуйн хувиргалт f, g өгч гэе. Энэ огторгуйн дурын $\mathbf{x}$ векторын хувьд $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ байх h хувиргалтыг f, g хувиргалтуудын нийлбэр гэж нэрлээд $h = f + g$ гэж тэмдэглэнэ. Тодорхойлолтоос $f + g = g + f$ байх нь илэрхий байна.

Теорем 6.8. Шугаман хувиргалтуудын нийлбэр нь шугаман хувиргалт байна.

Баталгаа. f, g нь ямар нэг огторгуйн шугаман хувиргалтууд гэе. Тэгвэл энэ огторгуйн дурын $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ векторуудын хувьд

$$f(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = \alpha f(\mathbf{x_1}) + \beta f(\mathbf{x_2})$$

$$g(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = \alpha g(\mathbf{x_1}) + \beta g(\mathbf{x_2})$$

(энд α, β нь дурын тоо) байна. $\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}$ векторт $f + g$ хувиргалтыг хэрэглэвэл

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) &= h(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = f(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) + g(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = \\ &= \alpha f(\mathbf{x_1}) + \beta f(\mathbf{x_2}) + \alpha g(\mathbf{x_1}) + \beta g(\mathbf{x_2}) = \alpha(f(\mathbf{x_1}) + g(\mathbf{x_1})) + \\ &+ \beta(f(\mathbf{x_2}) + g(\mathbf{x_2})) = \alpha h(\mathbf{x_1}) + \beta h(\mathbf{x_2})\end{aligned}$$

Ийнхүү

$$h(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) = \alpha h(\mathbf{x_1}) + \beta h(\mathbf{x_2})$$

болж $h = f + g$ нь шугаман хувиргалт гэдэг нь батлагдав. ▲

Теорем 6.9. Хэрэв шугаман хувиргалт f, g нь ямар нэг суурьт харгалзан A, B матрицуудтай бол энэ суурьт $f + g$ хувиргалт нь $A + B$ матрицтай байна.

Баталгаа. $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = g(\mathbf{x})$, $f+g$ хувиргалтын матрицыг C гэе. Тэгвэл $h(\mathbf{x}) = (f + g)(\mathbf{x})$ байх ба

$$Y = AX, \qquad Z = BX \tag{6.21}$$

$$Y + Z = CX \tag{6.22}$$

байна. (6.21)-ээс тэнцлээс

$$Y + Z = (A + B)X \tag{6.23}$$

гэж гарна. (6.22), (6.23)-ыг жишиж үзвэл $C = A + B$. ▲

6.9. Үл бөхөх шугаман хувиргалт

Хэрэв f шугаман хувиргалтын матриц нь үл бөхөх бол f хувиргалтыг үл бөхөх шугаман хувиргалт гэнэ. Эсрэг тохиолдолд ($\det A = 0$ *бол) бөхөх хувиргалт гэнэ.*

Теорем 6.10. Үл бөхөх шугаман хувиргалт нь харилцан нэг утгатай (биекц) байна. Урвуу нь: харилцан нэг утгатай хувиргалт бүхэн үл бөхөх байна.

Баталгаа. f үл бөхөх шугаман хувиргалт гэе.
$\mathbf{y}^*(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ вектор бүхэнд

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*$$

буюу

$$AX = Y^* \tag{6.24}$$

байх $\mathbf{x}$ вектор олдоно гэж батлана. Энд X, Y^* нь харгалзан $\mathbf{x}, \mathbf{y}^*$ векторуудын координатаас тогтох багана матрицууд.

(6.24) систем нь үл бөхөх (өгснөөр $\det A \neq 0$) тул $x_1^*, \ldots, x_n^*$ гэсэн ганц шийдтэй. Иймд $\mathbf{y}^*$ вектор нь $\mathbf{x}^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ гэсэн ганц эх дүртэй байна. Энэ нь f хувиргалт харилцан нэг утгатайг заана.

Урвууг нь баталъя. f нь ямар нэг суурьт A матрицтай харилцан нэг утгатай шугаман хувиргалт гэе. $\mathbf{y}^*$ вектор бүхэн цор ганц эх дүртэй гэдгээс (6.24) систем шийдтэй. Эндээс $\det \neq 0$ байна. Иймд харицан нэг утгатай f хувиргалт үл бөхөх байна. ▲

Теорем 6.11. f шугаман хувиргалт үл бөхөх байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь f хувиргалт тэгээс ялгаатай векторыг тэгээс ялгаатай векторт шилжүүлэх юм. Өөрөөр хэлбэл

$$f - \text{үл бөхөх} \;\leftrightarrow\; \mathbf{x} \neq 0; f(\mathbf{x}) \neq 0$$

Баталгаа. $\Rightarrow$: f хувиргалт үл бөхөх ямар нэг суурь дахь f-ийн матриц A байг. Өөрөөр хэлбэл $\det A \neq 0$ байг. Үл бөхөх хувиргалт бүхэн харилцан нэг утгатай мөн шугаман хувиргалт бүхэн тэг векторыг тэг векторт шилжүүлдэг гэдгээс f нь тэгээс ялгаатай векторыг тэгээс ялгаатай векторт шилжүүлэх нь илэрхий байна.

$\Leftarrow$: A матрицтай f шугаман хувиргалт тэгээс ялгаатай векторыг тэгээс ялгаатай векторт шилжүүлдэг гэе.

Хэрэв f хувиргалт бөхөх өөрөөр хэлбэл $\det A = 0$ гэвэл $AX = O$ систем тэгээс ялгаатай $\mathbf{x}^*(\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*}, \ldots, \mathbf{x_n^*})$ шийдтэй байна. Энэ нь f хувиргалтын тэгээс ялгаатай $\mathbf{x}^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ векторыг тэг векторт шилжүүлж байна гэсэн үг. Энэ нь нөхцөлд харшилж байна. Иймд $\det A \neq 0$, f-хувиргалт үл бөхөх. ▲

Теорем 6.12. Үл бөхөх шугаман хувиргалтуудын үржвэр үл бөхөх байна.

Баталгаа. f, g нь ямар нэг суурьт харгалзан A, B матрицуудтай үл бөхөх шугаман хувиргалт байг. Теорем 6.7-аар $f \cdot g$ хувиргалт нь AB матрицтай байна. Теоремын нөхцлөөр

$$\det A \neq 0 \quad \det B \neq 0$$

Эндээс $f \cdot g$ хувиргалтын хувьд $\det(AB) \neq 0$. Энэ нь $f \cdot g$ хувиргалт үл бөхөх гэдгийг харуулж байна. ▲

6.10. Шугаман хувиргалтын урвуу хувиргалт

Тодорхойлолт. *Дурын* $\mathbf{x}$ *векторын хувьд*

$$f \cdot \varphi(\mathbf{x}) = \varphi \cdot f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \tag{6.25}$$

байх f, φ шугаман хувиргалтуудыг харилцан урвуу хувиргалт гэнэ. f-ийг хувиргалт φ-д урвуу, хувиргалт φ-г хувиргалт f-д урвуу гэнэ.

Хэрэв f, φ хувиргалтууд нь ямар нэг суурьт харгалзан A, B матрицтай ба f, φ нь харилцан урвуу бол (6.25) тэнцлээс $AB = BA = E$ гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл A, B матрицууд нь харилцан урвуу байна.

Дээрх тодорхойлолтоос дараах өгүүлбэрүүд мөрдөн гарна.

1. f шугаман хувиргалтын урвуу хувиргалт оршин байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь f хувиргалт үл бөхөх байна.

2. A матрицтай үл бөхөх шугаман хувиргалт бүрийн хувьд зөвхөн ганц урвуу хувиргалт орших ба урвуу хувиргалтын матриц нь A^{-1} байна.

6.11. Шугаман хувиргалтын хувийн вектор

Тодорхойлолт. *Шугаман огторгуйн* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *вектор, f шугаман хувиргалтын хувьд*

$$f(\mathbf{x}) = k\mathbf{x} \tag{6.26}$$

байх k тоо олдож байвал $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *векторыг f шугаман хувиргалтын хувийн вектор гэнэ.*

Хэрэв шугаман огторгуй нь бодит бол k бодит тоо, огторгуй нь комплекс бол k комплекс тоо байна.

k тоог $\mathbf{x}$ векторын f хувиргалт дахь хувийн утга буюу f хувиргалтын хувийн утга гэнэ. (6.26) тэнцлийг матрицан хэлбэрээр бичвэл

$$AX = kX \tag{6.27}$$

энд A нь f хувиргалтын матриц, X нь $\mathbf{x}$ векторын координатын багана матриц.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *(6.27)-г хангах тэгээс ялгаатай X багана матрицыг A матрицын k хувийн утгатай хувийн вектор багана гэнэ.*

ЖИШЭЭ 6.9. Хоёр хэмжээст шугаман огторгуйн шугаман хувиргалт f нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицтай юм гэе. $\mathbf{x} = \mathbf{e_1} - 3\mathbf{e_2}$ вектор нь энэ хувиргалтын $k = -1$ хувийн утгатай хувийн вектор болохыг батал.

Бодолт. $|\mathbf{x}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = -X$$

Өөрөөр хэлбэл $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} \quad k = -1.$

Дараах өгүүлбэрүүд үнэн.

1. Шугаман хувиргалтын хувийн вектор зөвхөн ганц хувийн утгатай.

Баталгаа. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ вектор нь f хувиргалтанд $k_1 \neq k_2$ гэсэн хоёр хувийн утгатай юм гэе. Тэгвэл $f(\mathbf{x}) = k_1\mathbf{x} \quad f(\mathbf{x}) = k_2\mathbf{x}$ гэдгээс $k_1\mathbf{x} = k_2\mathbf{x} \Rightarrow (k_1 - k_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 - k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$. ▲

2. $\mathbf{x}$ нь f хувиргалтын k хувийн утгатай хувийн вектор ба λ нь тэгээс ялгаатай тоо бол $\lambda\mathbf{x}$ нь f хувиргалтын k хувийн утгатай вектор болно.

Баталгаа. Хэрэв $\mathbf{x}$ нь k хувийн утгатай вектор бол

$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda k\mathbf{x} = k(\lambda\mathbf{x})$$

байна. Эндээс $\lambda\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ вектор (6.26) нөхцлийг хангаж байна. Иймд $\lambda\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ вектор нь f хувиргалтын k хувийн утгатай хувийн вектор болж байна. ▲

3. Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ нь f шугаман хувиргалтын нэг ижил k хувийн утгатай шугаман хамааралгүй хувийн векторууд бол $\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}$ нь мөн f хувиргалтын k хувийн утгатай хувийн вектор байна.

Баталгаа. Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ нь шугаман хамааралгүй хувийн векторууд бол $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$ нь тэг биш вектор ба

$$f(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2}) = k\mathbf{x_1} + k\mathbf{x_2} = k(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$$

Өөрөөр хэлбэл $f(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = k(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$. ▲

МӨРДЛӨГӨӨ. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ нь f шугаман хувиргалтын k гэсэн ижил хувийн утгатай шугаман хамааралгүй векторууд бол эдгээр векторуудын дурын (мэдээжийн биш) шугаман эвлүүлэг бүхэн нь энэ хувиргалтын k хувийн утгатай хувийн вектор болно (Баталгаа нь 2 ба 3-р өгүүлбэрээс гарна).

4. Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ нь f хувиргалтын харгалзан $k_1, k_2,\quad k_1 \neq k_2$ хувийн утгатай хувийн векторууд бол $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ нь шугаман хамааралгүй векторууд байна.

Баталгаа. $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ нь шугаман хамааралтай векторууд гэе. Тэгвэл $\alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} = \mathbf{0},\quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ шугаман эвлүүлэг олдоно. Тодорхой болгож $\alpha_1 \neq 0$ гэе. Сүүлчийн тэнцлээс $\mathbf{x_1}$ векторыг олбол

$$\mathbf{x_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x_2} = c\mathbf{x_2} \tag{6.28}$$

$\mathbf{x_1} \neq \mathbf{0}$ тул $c \neq 0$ болно. 2-р өгүүлбэрийг анхаарвал $c\mathbf{x_2}$ нь f хувиргалтын k_2 хувийн утгатай хувийн вектор болно. 1-р өгүүлбэр ба (6.28)-аас $k_1 = k_2$ болно. Энэ нь теоремын нөхцөлд зөрчиж байна. Иймд $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ нь шугаман хамааралгүй. ▲

4-р өгүүлбэрийг f хувиргалтын хувийн утга нь хос хосоороо ялгаатай байх $n > 2$ тооны хувийн векторууд шугаман хамааралгүй гэж өргөтгөн баталж болно. Үүний урвуу өгүүлбэр үнэн байх албагүй. Ижил хувийн утгатай шугаман хамааралгүй хувийн векторууд олддог.

ТЕОРЕМ 6.13. Комплекс шугаман огторгуйн f шугаман хувиргалт k хувийн утгатай хувийн вектортай байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь k энэ хувиргалтын тодорхойлогч тэгшитгэлийн шийд байх юм.

Баталгаа. W комплекс шугаман огторгуйн шугаман оператор f нь k хувийн утгатай $\mathbf{x}$ хувийн вектортай байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\;\; \mathbf{x} \in W$ векторын хувьд

$$AX = kX \quad \text{буюу} \quad (A - kE)X = O \tag{6.29}$$

биелэх юм. Энд A нь f-ийн ямар нэг суурь дахь матриц X нь $\mathbf{x}$ векторын энэ суурь дахь координатаас тогтох багана матриц, E нь нэгж матриц.

(6.29) нь үл мэдэгдэхийн тоо нь тэгшитгэлийн тоотой тэнцүү байх шугаман тэгшитгэлийн нэг төрлийн системийн матрицан бичлэг. Энэ систем тэгээс ялгаатай шийдтэй байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\det(A - kE) = 0$. Өөрөөр хэлбэл k нь тодорхойлогч тэгшитгэлийн шийд байна. ▲

САНАМЖ. Тодорхойлогч тэгшитгэлийн зөвхөн бодит шийд нь бодит шугаман огторгуйн шугаман хувиргалтын хувийн утга болно.

Шугаман хувиргалтын хувийн утгуудыг энэ хувиргалтын матрицын хувийн утгууд гэж нэрлэнэ.

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хэрэв хувийн утга k_o нь тодорхойлогч тэгшитгэлийн m давхардсан шийд бол k_o-ийг давтагдсан хувийн утга гэнэ. Хэрэв хувийн* *утга нь тодорхойлогч тэгшитгэлийн энгийн шийд бол түүнийг энгийн хувийн утга гэнэ.*

Дээр баталсан теоремуудаас хэрэв k хувийн утгатай f шугаман хувиргалтын матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

бол f хувиргалтын k хувийн утгатай хувийн векторын координатуудыг (6.29) системээс олж болно гэж мөрдөн гарна. (6.29) системийг задалж бичвэл

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-k)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-k)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-k)x_n = 0 \end{array}\right\} \tag{6.30}$$

Теорем 6.14. k нь n хэмжээст огторгуйн A матрицтай шугаман хувиргалт f-ийн хувийн утга гэе. Хэрэв $A-kE$ матрицын ранг r бол f хувиргалт нь k хувийн утгатай $n-r$ тооны шугаман хамааралгүй хувийн вектоpуудтай.

Баталгаа. $A = (a_{ij}) \quad (i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n})$ нь шугаман хувиргалтын матриц бол k хувийн утгатай хувийн векторуудыг (6.30) системээс олно. Теоремын нөхцлөөр энэ системийн матриц $A-kE$ ба $\operatorname{rang}(A-kE) = r$. Иймд k хувийн утгатай $n-r$ шугаман хамааралгүй хувийн векторууд олдоно. ▲

(6.30) системийн шийдүүдийн огторгуй нь f хувиргалтын k хувийн утгатай байх бүх хувийн векторууд ба тэг вектороос тогтох олонлогтой давхцана. Энэ огторгуйг өгсөн f хувиргалтын k хувийн утгатай хувийн векторуудын огторгуй гэж нэрлэнэ. Энэ огторгуйн хэмжээс $n-r$ нь k хувийн утгын давтамжаас хэтрэхгүй.

6.12. Шугаман хувиргалтын хувийн векторуудыг олох

Теорем 6.13, 6.14-үүд нь ямар нэг суурьт A матрицтай f шугаман хувиргалтын хувийн векторуудыг олох аргыг заадаг. Үүнд:

1. Өгсөн хувиргалтын тодорхойлогч тэгшитгэлийг зохиож, түүний шийд $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$-үүдийг, өөрөөр хэлбэл тодорхойлогч тоонуудыг олно.

2. Хэрэв V шугаман огторгуй бодит бол тодорхойлогч тэгшитгэлийн зөвхөн бодит шийдүүд нь өгсөн хувиргалтын хувийн утга болно.

3. (6.30) системд өгсөн хувиргалтын хувийн утгын нэгийг ($k = k_i$) гэж орлуулж энэ системийн тэг биш $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ шийдийг олно.

4. λ_i хувийн утгатай хувийн вектор $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$-ийг бичнэ.

Үүнтэй адилаар өгсөн хувиргалтын бусад хувийн утга векторуудыг олно.

Жишээ 6.10. Ямар нэгэн суурьт

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицтай f хувиргалтын хувийн векторуудыг ол.

Бодолт. f хувиргалтын тодорхойлогч тэгшитгэл нь

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

байна. Энэ тэгшитгэлийн шийдүүд нь $\lambda_1 = \lambda_2 = 9, \ \ \lambda_3 = -9$.

1. Энэ бүх шийдүүд нь f хувиргалтын хувийн утга болно.

2. Хувийн векторыг олохын тулд (6.30) системд $k = 9$ гэж орлуулбал

$$\left.\begin{array}{r} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

систем үүснэ. Энэ системийн шийд $x_1 = s_1$, $x_2 = -2s_1 - 2s_2$, $x_3 = s_2$ $\ s_1, s_2$ нь дурын $|s_1| + |s_2| \neq 0$ байх бодит тоо.

3. $\mathbf{x}(s_1, -2s_1 - 2s_2, s_2)$ нь f хувиргалтын $k_1 = 9$ хувийн утгатай хувийн вектор.

Үүнтэй адилаар $k_2 = -9$ хувийн утгатай $\mathbf{y}(2t, t, 2t)$, $(t \neq 0, \forall t \in \mathbb{R})$ хувийн векторыг олно.

6.13. Шугаман хувиргалтыг диагональ хэлбэрт оруулах

Тодорхойлолт. *Хэрэв f шугаман хувиргалтын хувийн векторуудаас тогтох суурь олдож байвал f шугаман хувиргалтыг энгийн бүтэцтэй гэнэ.*

Хэрэв f хувиргалтын матриц диагональ хэлбэртэй байх суурь олдож байвал f хувиргалтыг диагональчлагдах хувиргалт гэнэ.

Теорем 6.15. Шугаман хувиргалт f диагональчлагдах зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь f хувиргалт энгийн бүтэцтэй байх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт f хувиргалтын матриц диагональ хэлбэртэй өөрөөр хэлбэл

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

юм гэе. Тэгвэл $f(\mathbf{e_i}) = \lambda_i \mathbf{e_i} \quad (i = \overline{1,n})$. Ингэж тэгээс ялгаатай $\mathbf{e_i}$ вектор (6.26) нөхцлийг хангаж байна. Энэ нь $\mathbf{e_i}$ вектор f хувиргалтын λ_i хувийн утгатай хувийн вектор гэдгийг заана. Ийнхүү f хувиргалт энгийн бүтэцтэй болов.

$\Leftarrow$: $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ нь f хувиргалтын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ хувийн утгатай хувийн векторуудаас тогтох суурь гэе. Өөрөөр хэлбэл f хувиргалт энгийн бүтэцтэй юм гэе.

Тэгвэл $f(\mathbf{e_i}) = \lambda_i \mathbf{e_i}$ $i = \overline{1,n}$ байна. Эндээс авч үзэж байгаа суурьт f хувиргалт нь

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

диагональ матрицтай гэдэг нь харагдана. ▲

Комплекс огторгуйн квадрат матриц A-ийн хувьд $T^{-1}AT$ нь диагональ матриц байх үл бөхөх комплекс матриц T олдож байвал A матрицыг диагональчлагдах гэнэ.

Бодит огторгуйн квадрат матриц A-ийн хувьд $T^{-1}AT$ нь бодит диагональ матриц байх үл бөхөх бодит T матриц олдож байвал A матрицыг бодит огторгуйд диагональчлагдах матриц гэнэ.

A ба $T^{-1}AT$ матрицуудын тодорхойлогч олонлогууд нь давхцах ба тодорхойлогч тоонууд нь түүний диагональ дээрх элементүүдтэй тэнцүү. Ингэхлээр хэрэв A матриц диагональчлагддаг бол

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

байх ба $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ нь A матрицын тодорхойлогч тоонууд.

Теорем 6.16. *n эрэмбийн A матриц харгалзан $m_1, \ldots, m_s$ $(m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n)$ давталттай хувийн утгууд $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ нь хос хосоороо ялгаатай* юм гэе. Хэрэв $m_1 = n - r_1$, $m_2 = n - r_2$, …, $m_s = n - r_s$ ба $r_1, r_2, \ldots, r_s$ нь $A - \lambda_1 E, \ldots, A - \lambda_s E$ матрицуудын ранг өөрөөр хэлбэл $\operatorname{rang}(A - \lambda_i E) = r_i$ бол матриц A диагональчлагдана.

Баталгаа.

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n} \tag{6.31}$$

суурьт A матрицтай $f : V \to V$ шугаман хувиргалт авч үзье.

Энэ суурьт λ_i $(i = \overline{1,n})$ хувийн утгатай хувийн векторын координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$-үүдийг

$$(A - \lambda_i E)X = 0 \tag{6.32}$$

матрицан тэгшитгэлээс олно. Энд $X = [x_1\ x_2 \ldots\ x_n]^{\mathrm{T}}$. $A - \lambda_i E$ матрицын ранг r_i бол (6.32) системийн шийдийн фундаменталь систем нь $n - r_i = m_i$ тооны вектор шийдүүдээс тогтоно. Ингэхлээр f хувиргалт нь λ_i хувийн утгатай шугаман хамааралгүй хувийн $\mathbf{m_i}$ векторуудтай. Ялгаатай хувийн утгатай хувийн векторууд шугаман хамааралгүй байдаг гэдгээс $n = \sum\limits_{i=1}^{s} \mathbf{m_i}$ тооны шугаман хамааралгүй хувийн векторууд

$$\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n} \tag{6.33}$$

олдоно. Эдгээр нь V огторгуйн суурь болно. f хувиргалтын (6.33) суурь дахь матриц $W = T^{-1}AT$ нь диагональ хэлбэртэй ба (6.31) сууриас (6.33) суурьт шилжих матриц A матриц нь диагональчлагдана. ▲.

Мөрдлөгөө. Хэрэв бодит матрицын тодорхойлогч бүх тоонууд нь бодитой ба хос хосоороо ялгаатай бол уул матриц бодит огторгуйн диагональчлагдах матриц байна.

Санамж. Теорем 6.16-ийн баталгаанаас A матрицыг диагональчлагч T матрицын баганууд нь A матрицын шугаман хамааралгүй хувийн вектор баганууд байна гэж мөрдөн гарна.

Жишээ 6.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицын $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$ гэсэн тодорхойлогч тоонууд нь харгалзан $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ давталттай. $\operatorname{rang}(A - \lambda_1 E) = 1$ ба $m_1 = n - r_1 = 3 - 1 = 2$, $\operatorname{rang}(A - \lambda_2 E) = 2$ ба $m_2 = n - r_2 = 3 - 2 = 1$ байна. Эндээс теорем 6.16-ийн нөхцөл биелж байгаа нь харагдаж байна. Иймээс A матриц нь

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

диагональ матрицад шилжинэ. $T^{-1}AT = B$ нөхцлийг хангах T матрицыг олъё. A матрицын $\lambda_1 = 9$ хувийн утгатай хувийн векторууд нь $\mathbf{x}(s_1, -2s_1 - 2s_2, s_2)$, $\lambda_2 = -9$ хувийн утгатай хувийн вектор нь $\mathbf{y}(2t, t, 2t)$ байна (жишээ 6.10-ыг хар). $s_1 = 0,\ s_2 = 1$ ба $s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ t = 1$ утгуудад харгалзах хувийн векторууд $\mathbf{x_1}(0, -2, 1)$, $\mathbf{x_2}(1, -2, 0)$, $\mathbf{x_3}(2, 1, 2)$ нь суурийн вектор болно.

Тэгвэл

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6.14. Ортогональ матрицууд

ТОДОРХОЙЛОЛТ. *Хэрэв бодит квадрат матриц*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

-д харгалзсан

$$\mathbf{x_1}(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \mathbf{x_2}(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots, \mathbf{x_n}(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$$

векторуудын систем ортонормчлогдсон бол A матрицыг ортогональ гэнэ.

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}$ нь евклид огторгуйн векторууд бол тэдгээрийн скаляр үржвэрийг

$$(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

гэж тодорхойлдог. Дээрх тодорхойлолтоос хэрэв A ортогональ бол дурын сонгосон i, j-ийн хувьд

$$(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1, & xrw \quad i = j \\ 0, & xrw \quad i \neq j \end{cases} \tag{6.34}$$

Дурын эрэмбийн нэгж матриц нь ортогональ байх нь илэрхий.

Жишээ 6.12. Дараах матрицууд ортогональ матриц мөн үү?

$$A = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Бодолт. A матрицад харгалзах $\mathbf{x_1}(0,6;0,8)$, $\mathbf{x_2}(-0,8;-0,6)$ векторуудын хувьд $(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = 0,6\cdot(-0,8)+0,8\cdot(-0,6)\neq 0 \Rightarrow A$ матриц ортогональ биш.

B матрицад харгалзах $\mathbf{x_1}(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $\mathbf{x_2}(-\sin\alpha;\cos\alpha)$ векторуудын хувьд $(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = \cos\alpha(-\sin\alpha)+(\sin\alpha)\cos\alpha = 0$ ба

$$(\mathbf{x_1},\mathbf{x_1}) = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1, \quad (\mathbf{x_2},\mathbf{x_2}) = (-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha = 1$$

байгаа учраас B матриц нь харгалзах $\mathbf{x_1}(1,0,0)$, $\mathbf{x_2}(0,-1,0)$, $\mathbf{x_3}(0,0,1)$ векторуудын систем нь ортонормчлогдсон байгаа учраас C матриц ортогональ байна.

Теорем 6.17. *A матриц ортогональ байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь*

$$A^{\mathrm{T}}A = E \tag{6.35}$$

юм. Энд A^{T} нь A матрицын хөрвөсөн матриц E нь A-тай ижил эрэмбийн нэгж матриц.

Баталгаа. $\Rightarrow$: $A=(a_{ij})$ ортогональ, $A^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})$ нь A-ийн хөрвөсөн матриц гэе. $C = A^{\mathrm{T}}A = (c_{ij})$ матрицыг олъё. Матрицыг үржих дүрмээр $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a'_{ik}a_{kj}$ байна. $a'_{ik} = a_{ki}$ гэдгээс $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot a_{kj}$ байна. (6.34)-өөр

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad i=j \\ 0, & \text{хэрэв} \quad i\neq j \end{cases}$$

Иймд

$$C = A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E$$

$\Leftarrow$: $A^{\mathrm{T}}\cdot A = E$ бол A ортогональ гэж батлана. $A^{\mathrm{T}}A = C = (c_{ij}) = E$ (нөхцлөөр) өөрөөр хэлбэл

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad i=j \\ 0, & \text{хэрэв} \quad i\neq j \end{cases}$$

байна. Нөгөө талаас

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot a_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad i=j \\ 0, & \text{хэрэв} \quad i\neq j \end{cases}$$

Эндээс A матрицын хувьд

$$(\mathbf{x_i},\mathbf{x_j}) = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad i=j \\ 0, & \text{хэрэв} \quad i\neq j \end{cases}$$

байна. Энэ нь A матрицын ортогональ гэдгийг зааж байна. ▲

Мөрдлөгөө 1. Ортогональ матрицын тодорхойлогч абсолют хэмжээгээрээ нэгтэй тэнцүү байна.

Баталгаа. A ортогональ бол $A^{\mathrm{T}} \cdot A = E$ (теорем 6.17) байна. Тэгвэл $\det(A^{\mathrm{T}} \cdot A) = \det E$ өөрөөр хэлбэл $\det A^2 = 1$ буюу $\det A = \pm 1$. Хэрэв $\det A = \pm 1$ ортогональ байх албагүй. ▲

Мөрдлөгөө 2. Ортогональ матрицууд бүхэн үл бөхөх байна.

Мөрдлөгөө 3. Ортогональ матрицуудын үржвэр ортогональ байна.

Баталгаа. A, B ортогональ матрицууд. Тэгвэл $A^{\mathrm{T}}A = E$, $B^{\mathrm{T}}B = E$ байна.

$$(AB)^{\mathrm{T}} \cdot (AB) = B^{\mathrm{T}} \cdot (A^{\mathrm{T}}A) \cdot B = B^{\mathrm{T}}EB = B^{\mathrm{T}}B = E$$

Энэ нь AB ортогональ матриц болохыг харуулж байна. ▲

Мөрдлөгөө 4. A матриц ортогональ байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$A^{\mathrm{T}} = A^{-1} \tag{6.36}$$

юм.

Мөрдлөгөө 5. Хэрэв A ортогональ матриц бол A^{T} ортогональ.

Баталгаа. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = A \cdot A^{\mathrm{T}} = A \cdot A^{-1} = E$. Энэ тэнцэл A^{T} ортогональ гэдгийг харуулж байна. ▲

Мөрдлөгөө 6. Хэрэв A ортогональ бол A^{-1} мөн ортогональ.

Теорем 6.18. Нэг нормчлогдсон сууриас нөгөө нормчлогдсон суурьт шилжих шилжилтийн матриц ортогональ байна.

Баталгаа.

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n} \tag{6.37}$$

$$\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \ldots, \mathbf{e_n'} \tag{6.38}$$

ортонормчлогдсон сууриуд гэе. (6.37) сууриас (6.38) суурьт шилжих матриц

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

гэе. Тэгвэл

$$\begin{array}{l} \mathbf{e_1'} = t_{11}\mathbf{e_1} + t_{21}\mathbf{e_2} + \ldots + t_{n1}\mathbf{e_n} \\ \mathbf{e_2'} = t_{12}\mathbf{e_1} + t_{22}\mathbf{e_2} + \ldots + t_{n2}\mathbf{e_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e_n'} = t_{1n}\mathbf{e_1} + t_{2n}\mathbf{e_2} + \ldots + t_{nn}\mathbf{e_n} \end{array}$$

Авч үзэж буй суурьуд ортонормчлогдсон гэдгээс

$$(\mathbf{e_i'}, \mathbf{e_j'}) = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad i = j \\ 0, & \text{хэрэв} \quad i \neq j \end{cases}$$

байна. Нөгөө талаас

$$(\mathbf{e_i'}, \mathbf{e_j'}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} \cdot t_{kj}.$$

Сүүлчийн хоёр тэнцлээс

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad i = j \\ 0, & \text{хэрэв} \quad i \neq j \end{cases}$$

болно. Энэ нь T матрицын ортогональ гэдгийг зааж байна. ▲

6.15. Ортогональ хувиргалт

Тодорхойлолт. *Хэрэв E евклид огторгуйн дурын x, y векторууд ба $f : E \to E$-ийн хувьд*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$$

нөхцөл биелж байвал f хувиргалтыг ортогональ гэнэ.

Теорем 6.19. $f : E \to E$ хувиргалт ортогональ байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь ортонормчлогдсон суурь дахь түүний матриц ортогональ байх юм.

Баталгаа. $f : E \to E$ хувиргалтын ортонормчлогдсон суурь дахь матрицыг A , энэ суурь дахь $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ векторуудын координатаас тогтох багана матрицуудыг X, Y гэе. (5.27) ба (6.6) томъёог ашиглавал

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^{\mathrm{T}} Y \tag{6.39}$$

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (AX)^{\mathrm{T}} AY$$

буюу

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} AY \tag{6.40}$$

болно.

$\Rightarrow$: f-ортогональ, өөрөөр хэлбэл $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$ бол (6.39), (6.40)-оос $X^{\mathrm{T}} Y = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} AY$ байна. Сүүлчийн тэнцэл ба теорем 6.1-ээс $A^{\mathrm{T}} A = E$ болох ба A матриц ортогональ байна.

$\Leftarrow$: A матриц ортогональ бол $A^{\mathrm{T}} A = E$ байна. Тэгвэл (6.39), (6.40) тэнцлүүдээс

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} AY = X^{\mathrm{T}} EY = X^{\mathrm{T}} Y = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

гэж гарна. Энэ нь $f : E \to E$ хувиргалт ортогональ гэдгийг зааж байна. ▲

ТЕОРЕМ 6.20. Евклид огторгуйн шугаман хувиргалт f ортогональ байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь f хувиргалт ортонормчлогдсон суурийг ортонормчлогдсон суурьт шилжүүлэх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: Евклид огторгуйн ортонормчлогдсон $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурьт A матрицтай f хувиргалт ортогональ гэе. Тэгвэл $\mathbf{e_i'} = f(\mathbf{e_i})$ $(i = \overline{1, n})$ векторын координатууд A матрицын i-р багананд байрлана. A ортогональ гэдгээс

$$(\mathbf{e_i'}, \mathbf{e_j'}) = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad i = j \\ 0, & \text{хэрэв} \quad i \neq j \end{cases}$$

байна. Ингэхлээр $\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \ldots, \mathbf{e_n'}$ нь ортонормчлогдсон суурийг үүсгэж байна.
$\Leftarrow$: f хувиргалт нь (6.37) ортонормчлогдсон суурийг (6.38) ортонормчлогдсон суурьт шилжүүлдэг гэе. Тэгвэл f хувиргалтын (6.37) суурь дахь матриц A нь (6.37) сууриас (6.38) суурьт шилжүүлэх матриц болно. Ингэхлээр (теорем 6.18) A матриц ортогональ. Иймд (теорем 6.19) f хувиргалт ортогональ байна. ▲

САНАМЖ. Теоремын баталгаанаас "f шугаман хувиргалт ямар нэг ортонормчлогдсон суурийг ортонормчлогдсон суурьт шилжүүлдэг бол бүх ортонормчлогдсон суурийг ортонормчлогдсон суурьт шилжүүлнэ. Энэ тохиолдолд f хувиргалт ортогональ байна" гэж мөрдөн гарна.

ТЕОРЕМ 6.21. f шугаман хувиргалт ортогональ байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь f хувиргалт векторын уртыг өөрчлөхгүй байх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: f ортогональ хувиргалт гэе.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) \;\Rightarrow\; |\mathbf{x}|^2 = |f(\mathbf{x})|^2 \;\Rightarrow\; |\mathbf{x}| = |f(\mathbf{x})|$$

$\Leftarrow$: Шугаман хувиргалт f нь векторын уртыг өөрчилдөггүй гэе. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2$ ба $|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2$-ийг олъё.

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2$$

$$|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 = (f(\mathbf{x} + \mathbf{y}), f(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) =$$
$$= |f(\mathbf{x})|^2 + 2(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) + |f(\mathbf{y})|^2$$

Эдгээр тэнцлүүдээс

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x} + \mathbf{y}), f(\mathbf{x} + \mathbf{y}))$$

гэж гарах ба

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$$

байна. Эндээс f хувиргалт ортогональ. ▲

Ортогональ хувиргалтуудын хувьд дараах өгүүбэр үнэн.

1. Ортогональ хувиргалт үл бөхөх.

2. Ортогональ хувиргалтанд урвуу хувиргалт орших ба үл бөхөх байна.

3. Хэрэв A нь ортогональ хувиргалтын матриц бол A^{T} нь түүний урвуу хувиргалтын матриц байна.

4. Ортогональ хувиргалтуудын үржвэр ортогональ байна.

6.16. M_2 огторгуй дахь ортогональ хувиргалтын геометр утга

M_2 нь хавтгайн чөлөөт векторуудын евклид огторгуй. $f : M_2 \to M_2$ ортогональ хувиргалт, түүний ортонормчлогдсон суурь дахь матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

гэе. A ортогональ матриц гэдгээс $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$. Өөрөөр хэлбэл

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{6.41}$$

байна. (6.41) тэнцлээс $\det A = 1$ тохиолдолд $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$.

A матриц ортогональ гэдгээс $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$ ба $a_{11} = \cos\varphi$, $a_{21} = \sin\varphi$ байх φ өнцөг олдоно. f хувиргалтын матриц нь

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ийнхүү f хувиргалт нь φ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт байна (жишээ 6.3-г хар).

Хэрэв $\det A = -1$ бол f нь OX тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэм, φ өнцгийн эргүүлэлтийг дараалан хэрэглэсэн хувиргалт байна. Үүнийг дараах тэнцлээс харж болно.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Энд $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ нь OX тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмийн матриц (жишээ 6.4-г хар).

6.17. Хосмог хувиргалт

$f : E_n \to E_n$ байх шугаман хувиргалт гэе.

Хэрэв $g : E_n \to E_n$ хувиргалт

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{y})) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n \tag{6.42}$$

нөхцлийг хангаж байвал g-г f хувиргалтын хосмог хувиргалт гэнэ. f-ийн хосмог хувиргалтыг f^* гэж тэмдэглэнэ.

Теорем 6.22. Хэрэв f хувиргалтанд хосмог хувиргалт оршдог бол тэр нь ганц байна.

Баталгаа. f_1^*, f_2^* нь f хувиргалтанд хосмог хувиргалтууд гэе. Өөрөөр хэлбэл $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$-ийн хувьд

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f_1^*(y)); \quad (f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f_2^*(y));$$

$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n)$ байдаг гэе. Тэгвэл эдгээр тэнцлээс

$$(\mathbf{x}, f_1^*(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, f_2^*(\mathbf{y})).$$

Эндээс $f_1^*(\mathbf{y}) = f_2^*(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in E_n$. Иймд $f_1^* = f_2^*$. ▲

Теорем 6.23. f, g нь E_n евклид огторгуйн шугаман хувиргалтууд, A, B нь харгалзан эдгээр хувиргалтуудын ямар нэг ортонормчлогдсон суурь дахь матрицууд гэе. g хувиргалт f хувиргалтанд хосмог хувиргалт байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$B = A^{\mathrm{T}} \tag{6.43}$$

байх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: g нь f хувиргалтанд хосмог. Өөрөөр хэлбэл $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$-ийн хувьд

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$$

байг.

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n} \tag{6.44}$$

ортонормчлогдсон суурь дахь $\mathbf{x}$ векторын координатаас тогтох багана матрицыг X, $\mathbf{y}$ векторын координатаас тогтох багана матрицыг Y гэж тэмдэглэе. Тэгвэл AX, BY нь харгалзан $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})$ векторуудын координатаас тогтох багана матрицууд ((6.44) суурь дахь) байна. Ийнхүү

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (AX)^{\mathrm{T}} Y = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Y \tag{6.45}$$

$$(\mathbf{x}, g(\mathbf{y})) = X^{\mathrm{T}} (BY) = X^{\mathrm{T}} BY \tag{6.46}$$

(6.45), (6.46) тэнцлүүдээс $X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Y = X^{\mathrm{T}}BY$ гэж гарна. Сүүлийн тэнцэл нь дурын X, Y матрицуудын хувьд биелнэ. Иймд теорем 6.1, теорем 6.2-оор $B = A^{\mathrm{T}}$ байна.

$\Leftarrow$: (6.43) тэнцэл биелдэг гэж үзье. Тэгвэл $A^{\mathrm{T}} - B = O$ ба дурын X, Y матрицуудын хувьд

$$X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} - B)Y = O \ \Rightarrow X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}}BY \ \Rightarrow (AX)^{\mathrm{T}}Y = X^{\mathrm{T}}(BY)$$

байна.

$$(AX)^{\mathrm{T}}Y = (f(\mathbf{x}), \mathbf{y}); \quad X^{\mathrm{T}}(BY) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$$

гэдгээс

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$$

Эндээс $g = f^*$. ▲

Баталсан теоремуудаас шугаман хувиргалтын хосмог нь шугаман хувиргалт байна гэж мөрдөнө.

Жишээ 6.13. $\mathbb{R}^3$ евклид огторгуйн $f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ ($\mathbf{a}$–бэхэлсэн вектор) байх f хувиргалтын хосмог хувиргалтыг ол.

Бодолт. f^* нь f хувиргалтын хосмог хувиргалт бол $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$-ийн хувьд

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f^*(\mathbf{y})) \tag{6.47}$$

байна.

f хувиргалтын тодорхойлолт, векторуудын холимог ба скаляр үржвэрийн чанарыг ашиглавал

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = ([\mathbf{x}, \mathbf{a}], \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, [\mathbf{a}, \mathbf{y}])$$

болно. Ингэж $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$-ийн хувьд

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, [\mathbf{a}, \mathbf{y}]) \tag{6.48}$$

байна. (6.47) ба (6.48) нөхцлүүдээс $f^*(\mathbf{y}) = [\mathbf{a}, \mathbf{y}]$. Өөрөөр хэлбэл $f^* = -f$ гэж гарна.

Жишээ 6.14. Өмнөх жишээнд авч үзсэн f, f^* хувиргалтуудын $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ суурь дахь матрицыг ол.

Бодолт. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ нь $\mathbf{a}$ векторын $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ суурь дахь координатууд гэе. f хувиргалтын энэ суурь дахь матриц A-г олъё.

$$f(\mathbf{i}) = [\mathbf{i}, \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \alpha_3\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k}$$

$$f(\mathbf{j}) = [\mathbf{j}, \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} = -\alpha_3 \mathbf{i} - \alpha_1 \mathbf{k}$$

$$f(\mathbf{k}) = [\mathbf{k}, \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} = -\alpha_2 \mathbf{i} + \alpha_1 \mathbf{j}$$

Иймээс f хувиргалтын **i, j, k** суурь дахь матриц

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

f^* хувиргалтын **i, j, k** суурь дахь матриц

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

байна.

Хосмог хувиргалт дараах чанартай.

1. $(f^*)^* = f$.

Баталгаа. f^* нь f-ийн хосмог хувиргалт тул $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$-ийн хувьд (6.42) тэнцэл биелнэ. Скаляр үржвэр байр солих хуульд захирагддаг гэдгээс

$$(f^*(\mathbf{y}), \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, f^*(\mathbf{x})) \tag{6.49}$$

Нөгөө талаас

$$(f^*(\mathbf{y})^*, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, (f^*)^*(\mathbf{x})) \tag{6.50}$$

байна. (6.49) ба (6.50) тэнцлүүдээс

$$(\mathbf{y}, (f^*)^*(\mathbf{x})) = (\mathbf{y}, f(\mathbf{x})) \qquad \forall \mathbf{y} \in E_n$$

болно. Иймд

$$(f^*)^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \;\Rightarrow\; (f^*)^* = f \qquad \blacktriangle$$

2. $(f \cdot g)^* = g^* \cdot f^*$.

Баталгаа. Хувиргалтуудын үржвэр, хосмог хувиргалтын тодорхойлолтоос

$$\begin{aligned} ((fg)(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (f(g(\mathbf{x})), \mathbf{y}) = (g(\mathbf{x}, f^*(\mathbf{y})) = \\ = (\mathbf{x}, g^*(f^*(\mathbf{y}))) = (\mathbf{x}, (g^* f^*)(\mathbf{y})) \end{aligned}$$

байна. Эндээс $((f \cdot g)(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, (g^* f^*)(\mathbf{y}))$ болно. Энэ тэнцлээс $g^* f^*$ нь $f \cdot g$ хувиргалтын хосмог. Өөрөөр хэлбэл $(fg)^* = g^* f^*$. $\blacktriangle$

3. $(f+g)^* = f^* + g^*$

4. $(\alpha f)^* = \alpha f^*$

5. $(f^*)^1 = (f^{-1})^*$ (f-үл бөхөх үед).

Тодорхойлолт. *Хэрэв $A_{n\times m} = (a_{ij})$, $A^*_{m\times n} = (a^*_{ij})$ матрицуудын хувьд $a^*_{ij} = \overline{a_{ij}}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) байвал $m \times n$ эрэмбийн $A^*_{m\times n}$ матрицыг $n \times m$ эрэмбийн $A_{n\times m}$ матрицд хосмог матриц гэнэ.*

Ийнхүү дурын ортонормчлогдсон суурь дахь хосмог хувиргалтуудад хосмог матрицууд харгалзана.

f хувиргалтын ранг нь түүний матрицын рангтай тэнцүү байна. Иймээс f, f^* хувиргалтууд ижил рангтай.

6.18. Өөртөө хосмог хувиргалт, түүний хувийн утга, хувийн вектор

$f : E_n \to E_n$ шугаман хувиргалт нь

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n, \quad (f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{y}))$$

нөхцлийг биелүүлж байвал f хувиргалтыг өөртөө хосмог (тэгш хэмтэй) гэнэ. Хэрэв f нь өөртөө хосмог бол $f^* = f$ байна.

Теорем 6.24. $f : E_n \to E_n$ хувиргалт өөртөө хосмог байх зайлшгүй хүрэлцээтэй нөхцөл нь ямар нэг ортонормчлогдсон суурь дахь түүний матриц тэгш хэмтэй байх юм.

Баталгаа. $\Rightarrow$: f өөртөө хосмог хувиргалт

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n} \tag{6.51}$$

ортонормчлогдсон суурь дахь түүний матриц A байг. Теорем 6.23-аар f-д хосмог хувиргалт f^* нь энэ суурьт A^{T} матрицтай. $f = f^*$ гэдгээс $A = A^{\mathrm{T}}$. Эндээс A тэгш хэмтэй.

$\Leftarrow$: f хувиргалт (6.51) суурь дахь матриц A тэгш хэмтэй. Өөрөөр хэлбэл $A = A^{\mathrm{T}}$ байг. Тэгвэл f^* хувиргалт (6.51) суурьт A^{T} матрицтай. f, f^* нь (6.51) суурьт ижил матрицтай тул $f = f^*$. ▲

Теорем 6.25. Өөртөө хосмог хувиргалтын ялгаатай хувийн утгуудад харгалзах хувийн векторууд ортогональ.

Баталгаа. Өөртөө хосмог f хувиргалтын $\lambda_1 \neq \lambda_2$ хувийн утгуудад харгалзах хувийн векторуудыг $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ гэе.

f нь өөртөө хосмог гэдгээс $(f(\mathbf{x_1}), \mathbf{x_2}) = (\mathbf{x_1}, f(\mathbf{x_2}))$ буюу $(\lambda_1\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = (\mathbf{x_1}, \lambda_2\mathbf{x_2})$ байна. Эндээс $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = 0$ болно. $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Ингэхлээр $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = 0$ ба $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ ортогональ векторууд байна. ▲

Мөрдлөгөө. Хэрэв $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ нь ялгаатай хувийн утгуудтай өөртөө хосмог хувиргалтын хувийн векторууд бол $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ нь хос хосоороо ортогональ байна.

Теорем 6.26. Өөртөө хосмог хувиргалтын тодорхойлогч тоо нь бодит тоо байна.

Баталгаа. Өөртөө хосмог f хувиргалтын ямар нэг ортонормчлогдсон суурь дахь матриц A ба f хувиргалтын хувийн утга $\lambda_{12} = \alpha \pm \beta i$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ байг. λ_1 хувийн утгатай хувийн векторын координатыг $(A - \lambda_1 E)X = O$ системээс олно. Энэ системийн коэффициентүүд нь комплекс тоо гэдгээс шийд X нь комплекс багана матриц байна. Тэгвэл $X^{\mathrm{T}} A\overline{X}$ үржвэрийг хоёр аргаар олно. Нэг талаас

$$X^{\mathrm{T}} A\overline{X} = X^{\mathrm{T}}\overline{AX} = (X)^{\mathrm{T}}\overline{AX} = X^{\mathrm{T}}\overline{\lambda_1 X} = \overline{X\lambda_1 X} = \overline{X_1}(X^{\mathrm{T}}\overline{X})$$

Нөгөө талаас

$$X^{\mathrm{T}} A\overline{X} = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} X = (AX)^{\mathrm{T}}\overline{X} = (\lambda_1 X)^{\mathrm{T}}\overline{X} = \lambda_1(X^{\mathrm{T}}\overline{X})$$

байна. Эндээс

$$\overline{\lambda_1}(X^{\mathrm{T}}\overline{X}) = \lambda_1(X^{\mathrm{T}}\overline{X})$$

буюу

$$(\overline{\lambda_1} - \lambda_1)(X^{\mathrm{T}}\overline{X}) = 0 \tag{6.52}$$

тэнцэл гарна. (6.52) тэнцлийг задалж бичвэл

$$X^{\mathrm{T}}\overline{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = [x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \ldots + x_n\overline{x_n}]$$

буюу

$$X^{\mathrm{T}}\overline{X} = [|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2] \tag{6.53}$$

болно (Энд $|x_i|$ нь x_i тооны модуль). X нь тэгээс ялгаатай багана матриц ба (6.53) тэнцлээс $X^{\mathrm{T}}\overline{X} \neq O$. Тэгвэл (6.52) тэнцэлд $\overline{\lambda_1} = \lambda_1$. Өөрөөр хэлбэл λ_1 бодит тоо. ▲.

Теорем 6.27. Өөртөө хосмог хувиргалтын хувийн векторуудаас тогтох ортогональ суурь оршин байна (олдоно).

Баталгаа. $f : E_n \to E_n$ өөртөө хосмог хувиргалт байг. $n = 1$ үед $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ вектор бүхэн f-ийн хувийн вектор болох ба E_1 огторгуйн ортогональ суурь болж чадна. Иймд $n = 1$ үед теорем үнэн байна.

$n = k-1$ үед теорем үнэн гэж үзээд $n = k$ үед теорем үнэн гэдгийг баталъя. Өөртөө хосмог хувиргалтын бүх хувийн утгууд бодит тоо байдаг гэдгээс энэ хувиргалт дор хаяж нэг $\mathbf{e_1}$ хувийн вектортой. $\mathbf{e_1}$ векторыг E_k огторгуйн ортогональ суурь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_k}$ болтол гүйцээе.

$$V = \{\alpha_2\mathbf{e_2} + \alpha_3\mathbf{e_3} + \ldots + \alpha_k\mathbf{e_k} \mid \forall\alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

олонлогийг авч үзье. Энэ V олонлог E_k огторгуйн дэд огторгуй болно (шалгаж үз). $\dim V = k-1, \quad f : V \to V$ гэж харуулъя. $\forall\mathbf{x} \in V$ бол

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e_1}) = (\alpha_2\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{e_n}, \mathbf{e_1}) = \alpha_2(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}) + \ldots + \alpha_n(\mathbf{e_k}, \mathbf{e_1}) = 0$$

байна. $(\mathbf{x}, \mathbf{e_1}) = 0$ гэдгээс $\mathbf{x} \in V$ нь илэрхий байна.

f өөртөө хосмог хувиргалт, $\mathbf{e_1}$ түүний хувийн утга учраас $\forall\mathbf{x} \in V$-ийн хувьд $(f(\mathbf{x}), \mathbf{e_1}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{e_1})) - (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{e_1}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{e_1}) = 0$.

Энэ нь хэрэв $\mathbf{x} \in V$ бол $f(\mathbf{x}) \in V$ гэдгийг зааж байна. Иймд $f : V \to V$ байна. Индукцийн ёсоор $(\dim V = k-1)$ V-д $g_2, g_3, \ldots, g_k$ гэсэн f-ийн хувийн вектороос тогтох ортогональ суурь олдоно. Тэгвэл $\mathbf{e_1}, g_2, \ldots, g_k$ нь f-ийн хувийн векторуудаас тогтох E_k огторгуйн ортогональ суурь болж байна. ▲

Мөрдлөгөө 1. Өөртөө хосмог хувиргалт бүхэн энгийн бүтэцтэй байна.

Мөрдлөгөө 2. Өөртөө хосмог хувиргалт бүрийн хувьд түүний хувийн векторуудаас тогтох ортонормчлогдсон суурь олдоно.

Мөрдлөгөө 3. Бодит огторгуйд тэгш хэмтэй матриц бүхэн диагональчлагдана.

Мөрдлөгөө 4. Тэгш хэмтэй матрицыг диагональчлагч матриц бүхэн ортогональ байна.

6.19. Дасгал ба бодлогууд

№1. $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ векторыг $\mathbf{y}$ векторт шилжүүлэх f хувиргалт шугаман болохыг тайлбарла.

а) $\mathbf{y}(2\alpha - \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1)$ **б)** $\mathbf{y}(\alpha_1, \alpha_2 + 2, \alpha_3)$ **в)** $\mathbf{y}(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$.

№2. $f : E_3 \to E_3$. Хэрэв $\mathbf{a}$ энэ огторгуйн бэхэлсэн вектор ба $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ $(\forall \mathbf{x} \in E_3)$ бол f шугаман хувиргалт байж чадах уу?

№3. $f : E_3 \to E_3$. Хэрэв $\mathbf{a} \in E_3$ бэхэлсэн вектор $f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ $(\forall \mathbf{x} \in E_3)$ бол f шугаман хувиргалт болох уу?

№4. $f : \mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2) \to \mathbf{y}(2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2)$ (ижил суурьт) байх шугаман хувиргалтын матрицыг ол.

№5. $f : \mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \to \mathbf{y}(\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2)$ байх шугаман хувиргалтын матрицыг бич.

№6. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ евклид огторгуйн ортогональ суурь $|\mathbf{e_1}| = \sqrt{2}$, $\mathbf{e_3} = 3$, $|\mathbf{e_3}| = 1$ ба $\mathbf{a} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$ бол евклид огторгуйн $\mathbf{x}$ вектор бүрийг $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a}$ векторт шилжүүлдэг шугаман f хувиргалтын матрицыг бич.

№7. $f : E_3 \to E_3$, $\forall \mathbf{x} \in E_3$ векторыг $\mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ векторт шилжүүлдэг шугаман f хувиргалтын матрицыг бич. Энд $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ нь ортонормчлогдсон суурь.

№8. Шугаман огторгуйн $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ ба $\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \ldots, \mathbf{e_n'}$ хоёр суурь өгчээ. Шугаман хувиргалтын $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_3}$ суурь дахь матриц A. Энэ хувиргалтын $\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \ldots, \mathbf{e_n'}$ суурь дахь матрицыг ол.

а) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e_1'} = \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_2'} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{aligned} \mathbf{e_1'} &= 3\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_2'} &= 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_3'} &= -\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3} \end{aligned}$

№9. E_2 огторгуйд $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ суурь өгчээ. Энэ суурьт

а) OX тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэмийн

б) OY тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэмийн матрицуудыг ол.

№10. Ямар нэг суурьт харгалзан A, B матрицуудтай f, g шугаман хувиргалтууд өгчээ. **а)** $f + g$ **б)** $f - 2g$ **в)** $f \cdot g$ **г)** $g \cdot f$ хувиргалтуудын өгсөн суурь дахь матрицуудыг ол.

№11. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт f хувиргалт $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ матрицтай. $\mathbf{e_1'} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_2'} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}$ суурьт g хувиргалт $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ матрицтай бол **а)** $f + g$ ($\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт) **б)** $f \cdot g$ ($\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ суурьт) **в)** $g \cdot f$

($\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ суурьт) хувиргалтын матрицыг ол.

№12. **а)** $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ огторгуйн суурь ба $f(\mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1}$, $f(\mathbf{e_2}) = 5\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2}$, $f(\mathbf{e_3}) = 3\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2} - 6\mathbf{e_3}$ байх f шугаман хувиргалтын тодорхойлогч тэгшитгэл, тодорхойлогч тоонуудыг ол.

б) $f(\mathbf{e_1}) = -\mathbf{e_1}$, $f(\mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e_1} + 5\mathbf{e_2}$, $f(\mathbf{e_3}) = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + 3\mathbf{e_3} + 5\mathbf{e_4}$, $f(\mathbf{e_4}) = \mathbf{e_1} + 7\mathbf{e_2} + 4\mathbf{e_3} + 6\mathbf{e_4}$ ба $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}$ нь огторгуйн суурь бол f хувиргалтын тодорхойлогч тэгшитгэл, тодорхойлогч тоог ол.

№13. Ямар нэг суурь дахь f хувиргалтын матриц A, $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ векторууд өгсөн бол эдгээр векторуудын аль нь f хувиргалтын хувийн вектор болох вэ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

№14. f, g шугаман хувиргалтуудын λ_1, λ_2 хувийн утгатай хувийн вектор $\mathbf{x}$ нь $f \cdot g$, $f + g$ хувиргалтуудыг харгалзан $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2$ хувийн утгатай хувийн вектор болохыг батал.

№15. Харгалзан $\lambda_1 \neq \lambda_2$ хувийн утгатай коллинеар биш $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ вектор нь f шугаман хувиргалтын хувийн векторууд бол $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$ нь f хувиргалтын хувийн вектор болж чадах уу?

№16. Ямар нэгэн суурьт A матрицтай шугаман хувиргалтын хувийн векторуудыг ол.

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ **б)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **в)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

г) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **д)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

№17. Бодит огторгуйд өгсөн матрицууд диагональ хэлбэрт шилжих эсэхийг тайлбарлаж, диагональ хэлбэрт шилжих тохиолдолд диагональ хэлбэрийн матрицыг бич.

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **в)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ **г)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

№18. f шугаман хувиргалтын ямар нэг суурь дахь матриц A өгчээ. Бодит шугаман огторгуйд хувиргалтын матриц нь диагональ хэлбэртэй байх суурийг ол.

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **б)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

в) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **г)** $A = \begin{bmatrix} -10 & 54 & 36 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 18 & 11 \end{bmatrix}$

д) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **е)** $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ж) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ **з)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

№19. A, A^{T} матрицууд ижил хувийн утгатай гэдгийг батал.

№20. Матрицын тодорхойлогч нь түүний хувийн утгуудын үржвэртэй тэнцүү гэдгийг батал.

№21. Хэрэв λ нь A матрицын хувийн утга бол $\lambda - \mu$ нь $A - \mu E$ матрицын хувийн утга байхыг батал.

№22. Хэрэв $\lambda \neq 0$ нь A матрицын хувийн утга бол $\frac{1}{\lambda}$ нь A^{-1} матрицын хувийн утга болохыг батал.

№23. Хэрэв $AB = BA$ бол A, B матрицуудын спектор давхцахыг батал.

№24. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $c \neq 0$ ба $A \xrightarrow{S_1 - mS_2} B$ $(m \neq 0)$ бол A, B матрицуудын спекторууд ялгаатайг батал.

№25. 2, 3 хувийн утгатай, хувийн векторууд нь харгалзан $[1,4]^{\mathrm{T}}$, $[3,2]^{\mathrm{T}}$ байх A матрицыг ол.

№26. A, B нь n эрэмбийн диагональчлагдах бөгөөд ижилхэн хувийн векторуудтай бол $AB = BA$ байхыг батал.

№27. Тэгтэй тэнцүү хоёр хувийн утгатай, хоёрдугаар эрэмбийн тэгээс ялгаатай матриц диагональчлагдахгүй гэдгийг батал.

№28. A матриц ортогональ эсэхийг тогтоож, хэрэв ортогональ бол түүний урвууг ол.

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **б)** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$.

№29. Өгсөн тэгш хэмтэй матрицыг диагональчлагч ортогональ матрицыг ол.

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **б)** $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ **в)** $\begin{bmatrix} 7 & 3\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} & 3 \end{bmatrix}$

г) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$.

Хариу

1. а) Шугаман, **б)** Биш, **в)** Биш **2.** Болно **3.** Болно
4. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 8 & -18 & -2 \\ -4 & 9 & 1 \\ -4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **8. а)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, **б)** $\begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}$ **9. а)** $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, **б)** $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **10. а)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, **б)** $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -1 \\ 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$,
в) $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \\ -15 & 3 & 15 \end{bmatrix}$, **г)** $\begin{bmatrix} 5 & -5 & 17 \\ 0 & 3 & 11 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ **11. а)** $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$, **б)** $\begin{bmatrix} 50 & -29 \\ 81 & -47 \end{bmatrix}$,
в) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **12. а)** $(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+6)=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-6$,
б) $(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda^2-9\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=5,\ \lambda_{34}=\frac{9\pm\sqrt{89}}{2}$ **13.** $\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ **15.** Чадахгүй **16. а)** $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} s,\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t,\ \forall s,t \in \mathbb{R},\ s \neq 0,$
$t \neq 0$, **б)** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t,\ \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} p,\ \forall s,t,p \in \mathbb{R},\ s \neq 0,\ t \neq 0,\ p \neq 0$, **в)**
$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} p,\ \forall s,t,p \in \mathbb{R},\ s \neq 0,\ t \neq 0,\ p \neq 0$, **г)** $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} s,$
$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} p,\ \forall s,t,p \in \mathbb{R},\ s \neq 0,\ t \neq 0,\ p \neq 0$, **д)** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} t,$
$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} p,\ \forall s,t,p \in \mathbb{R},\ s \neq 0,\ t \neq 0,\ p \neq 0$ **17. а)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ (диагоналийн элементүүдийн эрэмбийн нарийвчлалтай), **б)** Шилжихгүй, **в)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$,
г) шилжихгүй **18. а)** $\mathbf{e_1'} = (-\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})t,\ \mathbf{e_2'} = (\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2})s,\ \forall s,t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,$ $s \neq 0$, **б)** $\mathbf{e_1'} = (\mathbf{e_1}-2\mathbf{e_2})t,\ \mathbf{e_2'} = (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})s,\ \forall s,t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ s \neq 0$, **в)** $\mathbf{e_1'} = (\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3})t,\ \mathbf{e_2'} = (2\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}-2\mathbf{e_3})s,\ \mathbf{e_3'} = (2\mathbf{e_1}-2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3})k,\ \forall k,s,t \in \mathbb{R},$ $t \neq 0,\ s \neq 0$, **г)** $\mathbf{e_1'} = (24\mathbf{e_1}-12\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}+9\mathbf{e_4})s,\ \mathbf{e_2'} = (-2\mathbf{e_1}+9\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4})t,$ $\mathbf{e_3'} = k\mathbf{e_4},\ \mathbf{e_4'} = (\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4})p,\ \forall k,s,t,p \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ s \neq 0,\ p \neq 0,\ k \neq 0,$ **д)** $\mathbf{e_1'} = (6s_1+4t_1)\mathbf{e_1}+s_1\mathbf{e_2}+t_1\mathbf{e_3},\ \mathbf{e_2'} = (6s_2+4t_2)\mathbf{e_1}+s_2\mathbf{e_2}+t_2\mathbf{e_3}),$

$\mathbf{e}_3' = 3k\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$, $\forall k, s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, тэгэхдээ $\begin{vmatrix} 6s_1 + 4t_1 & s_1 & t_1 \\ 6s_2 + 4t_2 & s_2 & t_2 \\ 3k & 0 & k \end{vmatrix} \neq 0$, **е)** $\mathbf{e}_1' = k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_2' = (2t_1 + 3s_1)\mathbf{e}_1 - 2t_1\mathbf{e}_2 - 2s_1\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_3' = (2t_2 + 3s_2)\mathbf{e}_1 - 2t_2\mathbf{e}_2 - 2s_2\mathbf{e}_3$, $\forall k, s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, тэгэхдээ $\begin{vmatrix} k & k & -k \\ 2t_1 + 3s_1 & -2t_1 & -2s_1 \\ 2t_2 + 3s_2 & -2t_2 & -2s_2 \end{vmatrix} \neq 0$, **ж)** $\mathbf{e}_1' = k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_2' = s_1\mathbf{e}_1 + t_1\mathbf{e}_2 + 3(t_1 - s_1)\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_3' = s_2\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + 3(t_2 - s_2)\mathbf{e}_3$, $\forall k, s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, тэгэхдээ $\begin{vmatrix} k & k & k \\ s_1 & t_1 & 3(t_1 - s_1) \\ s_2 & t_2 & 3(t_2 - s_2) \end{vmatrix} \neq 0$, **з)** $\mathbf{e}_1' = -t_1\mathbf{e}_1 + t_1\mathbf{e}_2 + s_1\mathbf{e}_3 - s_1\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_2' = -t_2\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + s_2\mathbf{e}_3 - s_2\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_3' = k_1\mathbf{e}_1 + k_1\mathbf{e}_2 + p_1\mathbf{e}_3 + p_1\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4' = k_2\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + p_2\mathbf{e}_3 + p_2\mathbf{e}_4$, $\forall k_1, k_2, s_1, s_2, t_1, t_2, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, тэгэхдээ $\begin{vmatrix} -t_1 & t_1 & s_1 & -s_1 \\ -t_2 & t_2 & s_2 & -s_2 \\ k_1 & k_1 & p_1 & p_1 \\ k_2 & k_2 & p_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$ **25.** $-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 32 & -3 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$ **28. а)** Ортогональ биш, **б)** Ортогональ $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$ **29. а)** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, **б)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$, **в)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{5}{14}} \\ \sqrt{\frac{5}{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$, **г)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

VII бүлэг. Квадратлаг хэлбэр

7.1. Үндсэн тодорхойлолтууд

Тодорхойлолт.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

хэлбэртэй тоон функцийг тоон утга авдаг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ хувьсагчийн квадратлаг хэлбэр гэнэ. Энд a_{ij} тоог квадратлаг хэлбэрийн коэффициент гэнэ.

Квадратлаг хэлбэрийг $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ гэж тэмдэглэе.

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{7.1}$$

Хэрэв хувьсагч $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ба коэффициент a_{ij} нь бодитой тоо бол квадратлаг хэлбэрийг бодит гэж нэрлэнэ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицыг (7.1) квадратлаг хэлбэрийн матриц гэнэ. Цаашид $a_{ij} = a_{ji}$ өөрөөр хэлбэл A матриц тэгш хэмтэй гэж үзнэ.

Тодорхойлолт. *A матрицын рангийг квадратлаг хэлбэрийн ранг гэнэ. Хэрэв квадратлаг хэлбэрийн матриц нь үл бөхөх бол үл бөхөх квадратлаг хэлбэр гэнэ.*

A нь (7.1)-ийн матриц, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ багана матриц байг. $X^{\mathrm{T}}AX$ нь элемент нь $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$-тэй тэнцүү байх нэгдүгээр эрэмбийн матриц болно. Өөрөөр хэлбэл

$$[L(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = X^{\mathrm{T}}AX \quad \text{буюу} \quad L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$$

байна. $X^{\mathrm{T}}AX$-ийг квадратлаг хэлбэрийн матрицан хэлбэр гэнэ.

Жишээ 7.1. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3$ квадратлаг хэлбэрийг матрицан хэлбэртэй бич.

Бодолт. Өгсөн квадратлаг хэлбэрийн матриц

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a_{12} = a_{21} = 2a_{12} = 8)$$

Тэгвэл $L(x_1, x_2, x_3) = [x_1 x_2 x_3] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

n хэмжээст евклид E_n огторгуйн

$$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n} \tag{7.2}$$

ортонормчлогдсон суурь дахь $x \in E_n$ векторын координатыг $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $f : E_n \to E_n$ шугаман өөртөө хосмог оператор нь $A = (a_{ij})$ матрицтай ((7.2) суурьт) байг. Тэгвэл (4.27) ба (5.6) томъёонуудыг хэрэглэвэл

$$(f(x), x) = (Ax)^{\mathrm{T}} X \quad \text{буюу} \quad (f(x), x) = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} X$$

болно.

7.2. Квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт шилжүүлэх

Тодорхойлолт. *Хэрэв $i \neq j$ үед $a_{ij} = 0$ бол квадратлаг хэлбэрийг хялбар дүрстэй байна гэдэг.* Квадратлаг хэлбэрийн хялбар дүрс нь

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

байх ба түүний матриц нь диагональ матриц байна.

Хэрэв (7.1) квадратлаг хэлбэрийн матриц диагональ хэлбэртэй байх $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурь V шугаман огторгуйд олдож байвал (7.1)-ийг хялбар дүрст оруулсан гэж үзнэ.

Теорем 7.1. Квадратлаг хэлбэр бүрийг хялбар хэлбэрт шилжүүлж болно.

Баталгаа. $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ суурь дахь матриц нь A байх (7.1) квадратлаг хэлбэр өгсөн байг. A матриц нь тэгш хэмтэй гэдгээс

$$C = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

байх ортогональ B матриц олдоно.

B матриц нь $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ сууриас

$$\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n} \tag{7.3}$$

суурьт шилжих матриц болно.

X, Y нь $\mathbf{x}$ векторын харгалзан (7.2), (7.3) суурь дахь координатуудаас тогтох багана матриц гэе. Тэгвэл $X = BY$ байх ба

$$X^{\mathrm{T}}AX = (BY)^{\mathrm{T}}A(BY) = Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABY = Y^{\mathrm{T}}B^{-1}ABY = Y^{\mathrm{T}}CY$$

байна. Эндээс

$$X^{\mathrm{T}}AX = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \tag{7.4}$$

байна. ▲

Энэ (7.4) хэлбэрт байгаа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ нь A матрицын хувийн утга.

Жишээ 7.2. $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$ квадратлаг хэлбэрийг ортогональ матрицын тусламжтайгаар хялбар дүрст оруулж, энэ ортогональ матрицыг ол.

Бодолт. Квадратлаг хэлбэрийн матриц нь

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Тодорхойлогч тэгшитгэл $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$-ийг бодвол $\lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = 5$. Иймд өгсөн квадратлаг хэлбэрийн хялбар дүрс нь $20y_1^2 + 5y_2^2$ болно.

Квадратлаг хэлбэрийг хялбар дүрсэд шилжүүлэх ортогональ матрицын баганууд нь A матрицын нормчлогдсон хувийн векторуудын багана байна.

Эхлээд A матрицын $\lambda_1 = 20$ хувийн утгатай нормчлогдсон хувийн вектор баганыг олъё. A матрицын хувийн вектор баганыг $[u_1, u_2]^{\mathrm{T}}$ гэж тэмдэглэвэл

$$(A - \lambda E)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} 17-\lambda_1 & 6 \\ 6 & 8-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -3u_1 + 6u_2 = 0 \\ 6u_1 - 12u_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

болно. Энэ системийн шийд $u_1 = 2u_2$ байна. Иймд дурын $t \neq 0$-ийн хувьд $\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$ нь A матрицын $\lambda_1 = 20$ хувийн утгатай хувийн вектор багана болно. Харин нормчлогдсон хувийн вектор багана нь $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Одоо $\lambda_2 = 5$

хувийн утгатай хувийн вектор баганыг олбол:

$$0 = \begin{bmatrix} 17-\lambda_2 & 6 \\ 6 & 8-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} 12v_1 + 6v_2 = 0 \\ 6v_1 + 3v_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$v_2 = -2v_1$ байх ба $\forall s \neq 0$-ийн хувьд $[s \;\; -2s]^{\mathrm{T}}$ нь A матрицын $\lambda_2 = 5$ хувийн утгатай хувийн вектор багана. Харин нормчлогдсон хувийн вектор багана нь

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

болно. Олох ортогональ матриц

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

байна. Иймд

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ба өгсөн квадратлаг хэлбэр $20y_1^2 + 5y_2^2$ дүрстэй болно.

Жишээ 7.3. $x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$ квадратлаг хэлбэрийг хялбар дүрсэд шилжүүлэх ортогональ матрицыг ол.

Бодолт. Өгсөн квадратлаг хэлбэрийн матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

байна. Тодорхойлогч тэгшитгэл хэрэглэвэл

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

-ийг бодвол $\lambda_1 = -9, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 9$ байна.

$\lambda_1 = -9$ хувийн утгатай хувийн вектор багана X-ийн координатыг

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

гэж тэмдэглэе.

$$(A - \lambda E) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

системийг бичвэл

$$\left.\begin{array}{l} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{буюу} \quad \left.\begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Энэ системийн матрицын ранг 2-тэй тэнцүү байна. Иймд сүүлчийн систем нь

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

системтэй адил чанартай байна. Системийг бодвол

$$x_1 = -18t, \quad x_2 = -9t, \quad x_3 = -18t \quad (t \neq 0)$$

Вектор багана нь $[-18t, -9t, -18t]^{\mathrm{T}}$. Нормчлогдсон вектор багана нь $X_1^* = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^{\mathrm{T}}$ байна.

A матрицын $\lambda = 9$ хувийн утгатай вектор багана $[u_1, u_2, u_3]^{\mathrm{T}}$-д харгалзах системийг бичвэл

$$\left.\begin{array}{l} -8u_1 - 4u_2 - 8u_3 = 0 \\ -4u_1 - 2u_2 - 4u_3 = 0 \\ -8u_1 - 4u_2 - 8u_3 = 0 \end{array}\right\}$$

болох ба системийн матрицын ранг нь нэгтэй тэнцүү байгаа тул сүүлчийн систем нь $2u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ тэгшитгэлтэй тэнцүү чанартай. Эндээс $u_1 = s_1, \quad u_2 = -2s_1 - 2s_2, \quad u_3 = s_2$. Вектор багана

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ -2s_1 - 2s_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

$|s_1| + |s_2| \neq 0$ нөхцлийг хангах дурын $s_1, \ s_2$-ийн хувьд (7.5) нь A матрицын $\lambda = 9$ хувийн утгатай хувийн векторууд болно.

$\lambda = 9$ хувийн утгатай X_2, X_3 гэсэн ортогональ хувийн багана олдоно. (7.5)-д $s_1 = 1, \quad s_2 = 0$ гэж авбал $X_2 = [1, -2, 0]^{\mathrm{T}}$, X_3-ийг олохдоо X_2, X_3 ортогональ байхаар өөрөөр хэлбэл $s_1 + 4s_1 + 4s_2 = 0$ буюу $s_1 = -\frac{4}{5}s_2$ байхаар s_1, s_2-ийг сонгоно. Жишээлбэл $s_2 = 5$ гэвэл (7.5)-аас $X_3 = [-4, -2, 5]^{\mathrm{T}}$ гэж олдоно. X_2, X_3-ийг нормчилвол

$$X_2^* = \left[\frac{1}{5}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right]^{\mathrm{T}}, \quad X_3^* = \left[-\frac{4}{\sqrt{45}}, -\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}\right]^{\mathrm{T}}$$

Бидний олох матриц

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \frac{-2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix}$$

Квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт оруулах Лагранж, Якобийн аргуудыг авч үзье.

§ 7.2.1. Лагранжийн арга

Квадратлаг (7.1) хэлбэрт дараалан бүтэн квадрат ялгах замаар (7.1)-ийг хялбар хэлбэрт оруулна. Энд хоёр тохиолдол байна.

1. a_{ii} коэффициентаас ядаж нэг нь тэгээс ялгаатай байх тохиолдол. Тухайлбал $a_{11} \neq 0$ байг. (7.1) хэлбэрт байгаа x_1 хувьсагчийг агуулсан гишүүдийг ялган дараах хэлбэрт бичвэл:

$$L(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n) + L_1(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Энд $\ell_1(x_2, \dots, x_n)$ нь $n-1$ хувьсагчтай квадратлаг хэлбэр. Хаалтан доторх $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n$-ийг дараах байдлаар хувиргая.

$$\begin{aligned} a_{11}[x_1^2 + 2(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)\tfrac{x_1}{a_{11}} + \tfrac{1}{a_{11}^2}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \\ + \dots + a_{1n}x_n)^2 - \tfrac{1}{a_{11}^2}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)^2] = \\ = \tfrac{1}{a_{11}^2}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + L_2(x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Ийнхүү

$$L(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + L_2(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

болно. Энд $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial L}{\partial x_1}$ байна.

Хэрэв $\ell_2(x_2, \dots, x_n)$ хэлбэрт x_i^2-ийн коэффициентуудаас дор хаяж нэг нь тэгээс ялгаатай байвал $\ell_2(x_2, \dots, x_n)$-ийг үргэлжлүүлэн хувиргана.

2. (7.1) хэлбэрийн бүх $a_{ii} = 0$ байх тохиолдол.
$i \neq j$ үед $a_{ij} \neq 0$ байг. Тэгвэл

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{i-1} &= y_{i-1} \\ x_i &= y_i + y_j \\ x_{i+1} &= y_{i+1} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= y_n \end{aligned}\right\}$$

гэсэн үл бөхөх хувиргалт олдоно. Энэ хувиргалт нь $L(x_1, x_2, x_3)$ квадратлаг хэлбэрийг y_i^2-ийн коэффициент нь тэгээс ялгаатай квадратлаг хэлбэрт шилжүүлнэ. Ингэж 1-р тохиолдолд шилжинэ.

Жишээ 7.4. Лагранжийн арга хэрэглэн

$$L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2+2x_2x_3$$

квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт шилжүүл.

Бодолт. $a_{11}=1\neq 0$ байна гэдгээс

$$\begin{aligned}L(x_1,x_2,x_3)&=[x_1^2-x_1(3x_2-4x_3)+\\&+\tfrac{1}{4}(3x_2-4x_3)^2]-\tfrac{1}{4}(3x_2-4x_3)^2+2x_2x_3+x_3^2=\\&=(x_1-\tfrac{3}{2}x_2+2x_3)^2-\tfrac{9}{4}x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2=\\&=(x_1-\tfrac{3}{2}x_2+2x_3)^2-\tfrac{9}{4}(x_2^2-\tfrac{32}{9}x_2x_3+\tfrac{256}{81}x_3^2)+\tfrac{64}{9}x_3^2-3x_3^2=\\&=(x_1-\tfrac{3}{2}x_2+2x_3)^2-\tfrac{9}{4}(x_2-\tfrac{16}{9}x_3)^2+\tfrac{37}{9}x_3^2.\end{aligned}$$

Энд

$$y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3 \qquad y_2=x_2-\frac{16}{9}x_3 \qquad y_3=x_3$$

гэж орлуулбал $L(x_1,x_2,x_3)$-ийг

$$L(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-\frac{9}{4}y_2^2+\frac{37}{9}y_3^2$$

хэлбэрт шилжүүлж байна.

Жишээ 7.5. $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-5x_2x_3$ квадратлаг хэлбэрийг Лагранжийн аргаар хялбар хэлбэрт шилжүүл.

Бодолт. Бүх $a_{ii}=0$ тул $x_1=\frac{1}{2}(y_1-y_2)$, $x_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$, $x_3=y_3$ гэвэл $L(x_1,x_2,x_3)$-ийг

$$L(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-\frac{5}{2}y_1y_3-y_2^2-\frac{5}{2}y_2y_3$$

хэлбэрт шилжүүлнэ.

y_1^2-ийн коэффициент тэгээс ялгаатай тул $L(y_1,y_2,y_3)$-т бүтэн квадрат ялгах аргаар хялбар хэлбэрт оруулна.

$$\ell_1(y_1,y_2,y_3)=(y_1-\frac{5}{4}y_3)^2-(y_2+\frac{5}{4}y_3)^2$$

$$z_1=y_1-\tfrac{5}{4}y_3 \qquad z_2=y_2+\tfrac{5}{4}y_3 \qquad z_3=y_3$$

оператор $\ell_1(y_1,y_2,y_3)$-ийг $\ell_2(z_1,z_2,z_3)=z_1^2-z_2^2$ хэлбэрт шилжүүлнэ. Иймд

$$z_1=x_1+x_2-\tfrac{5}{4}x_3 \qquad z_2=-x_1+x_2+\tfrac{5}{4}x_3 \qquad z_3=x_3$$

гэсэн үл бөхөх хувиргалт нь $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2-5x_2x_3$ квадратлаг хэлбэрийг $\ell_2(z_1,z_2,z_3)=z_1^2-z_2^2+0\cdot z_3^2$ гэсэн хялбар хэлбэрт шилжүүлнэ.

§ 7.2.2. Якобын арга

$L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ квадратлаг хэлбэрийн

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицын гол булангийн минор гэж нэрлэгдэх

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

минорууд тэгээс ялгаатай тохиолдолд $L(x_1, \dots, x_n)$-ийг хялбар хэлбэрт шилжүүлэхдээ Якобийн арга гэж нэрлэх аргыг хэрэглэдэг.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}} AX$$

квадратлаг хэлбэр өгсөн гэе. Мөн A матрицын булангийн гол минорууд $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ бүгд тэгээс ялгаатай байг. Энэ тохиодолд $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ квадратлаг хэлбэрийг $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i y_i^2$ хялбар хэлбэрт шилжүүлэх

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 + \dots + d_{n1}y_n \\ x_2 = \qquad\quad y_2 + d_{32}y_3 + \dots + d_{n2}y_n \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad y_3 + \dots + d_{n3}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y_n \end{array}\right\}$$

гэсэн ганцхан, үл бөхөх хувиргалт олдоно гэдгийг баталж болно. Энд

$$\beta_1 = \Delta_1 \quad \beta_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \quad (j = \overline{2, n}) \tag{7.6}$$

Энэ хувиргалтын коэффициентуудыг

$$d_{ji} = (-1)^{j+i} \frac{\Delta_{j-1}i}{\Delta_{j-1}} \tag{7.7}$$

томъёогоор олно. Энд Δ_{j-1i} минор нь A матрицын $1, 2, \ldots, j-1$ дугаартай мөрүүд, $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j$ дугаартай багануудын огтлолцол дээр орших элементүүдээс тогтоно.

Жишээ 7.6. Якобын аргаар

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт шилжүүл.

Бодолт. $L(x_1, x_2, x_3)$-ийн матриц

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Булангийн гол минорууд нь $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = 2,\ \Delta_3 = 1$ (7.6) томъёогоор $\beta_1 = 2,\ \beta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1,\ \beta_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{1}{2}$ болно. $L(x_1, x_2, x_3)$ нь

$$\ell_1(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$$

гэсэн хялбар хэлбэрт шилжинэ.

Өгсөн квадратлаг хэлбэрийг хялбар дүрст шилжүүлэх хувиргалт (оператор) нь

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 \\ x_2 = \qquad\quad y_2 + d_{32}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad\ \ y_3 \end{array}\right\}$$

байх ба (7.7) томъёогоор коэффициентуудыг олбол

$$d_{21} = (-1)^{2+1}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$d_{31} = (-1)^{3+1}\frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$d_{32} = (-1)^{3+2}\frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 0$$

Иймд дээрх хувиргалт нь

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \qquad y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad\ \ y_3 \end{array}\right\}$$

болно.

Квадратлаг хэлбэрийн хялбар хэлбэр нь нэг утгатай биш. Гэвч бүх хялбар хэлбэрт ерөнхий чанар байна. Тухайлбал бүх хялбар хэлбэрт

1. Тэгтэй тэнцүү коэффициентуудын тоо нь ижил

2. Эерэг коэффициентуудын тоо нь ижил

3. Сөрөг коэффициентуудын тоо нь ижил байна.

7.3. Хавтгайн хоёрдугаар эрэмбийн шугаман тэгшитгэлийг хялбарчлах

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + gy + f = 0 \quad |a| + |b| + |c| \neq 0 \tag{7.8}$$

хоёрдугаар эрэмбийн тэгшитгэлийг авч үзье. Энэ тэгшитгэлийг

$$[x, y] \cdot \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d, q] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0 \tag{7.9}$$

хэлбэртэй бичиж болно.

(7.8), (7.9) тэгшитгэлийг хангах цэгүүдийн олонлог нь $(0, i, j)$ системд ямар нэг шугамыг дүрслэнэ. (7.8)-ийн эхний гурван гишүүн нь

$$ax^2 + bxy + cy^2 \tag{7.10}$$

нь (x, y)-ийн хувьд квадратлаг хэлбэр байна. Энэ квадратлаг хэлбэрийн (i, j) суурь дахь матриц нь

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

байна.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

матрицтай ортогональ хувиргалтаар (7.10) квадратлаг хэлбэрийг $\lambda_1' x'^2 + \lambda_2' y'^2$ гэсэн хялбар дүрсэд шилжүүлдэг гэе. Энэ хувиргалт нь ортонормчлогдсон (i, j) суурийг ортонормчлогдсон (i', j') суурьт

$$\begin{aligned} i' &= t_{11} i + t_{21} j \\ j' &= t_{12} i + t_{22} j \end{aligned}$$

томъёогоор шилжүүлнэ. Ингэхээр координатын $(0, i', j')$ системд (7.8) тэгшитгэл нь

$$\lambda_1^2 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + [d\ q] \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0 \tag{7.11}$$

хэлбэртэй болно.

(7.8) тэгшитгэл нь a, b, c коэффициентуудаас хамаарч ямар шугам дүрслэхийг шинжлэе.

(7.11) тэгшитгэлийн λ_1, λ_2 коэффициентүүд нь

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

тэгшитгэлийн шийдүүд байна. Өөрөөр хэлбэл

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - (\frac{b}{2})^2 = 0$$

тэгшитгэлийн шийдүүд байна. Энд дараах 3 тохиолдол байна. Үүнд:

1. $ac - \frac{b^2}{4} > 0$ бол (7.8) нь эллипслэг хэлбэрийн муруйг дүрслэнэ. Энэ тохиолдолд (7.11)-д $\lambda_1\lambda_2 > 0$ байна.

2. Хэрэв $ac - \frac{b^2}{4} < 0$ бол (7.8) нь гиперболлог хэлбэрийн дүрсийг дүрслэнэ. Үнэндээ энэ тохиолдолд $\lambda_1\lambda_2 < 0$ тул (7.11) нь гиперболлог хэлбэрийн дүрсийг дүрслэнэ (5.25-г үз).

3. Хэрэв $ac - \frac{b^2}{4} = 0$ бол (7.8) нь параболлог хэлбэрийн дүрсийг дүрслэнэ. Энэ тохиолдолд $\lambda_1\lambda_2 = 0$ байх ба (7.11) нь параболлог хэлбэрийн дүрсийг дүрслэнэ.

Жишээ 7.7. $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0$ тэгшитгэлийг хялбар хэлбэрт оруулж энэ тэгшитгэлээр дүрслэгдэх дүрсийг байгуул.

Бодолт. Өгсөн тэгшитгэлийг

$$[xy] \cdot \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [6\sqrt{13}\ 4\sqrt{13}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 13 = 0$$

гэж бичнэ.

$$[x\ y] \cdot \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт шилжүүлэх ортогональ хувиргалтын матриц T-г олъё. Энэ квадратлаг хэлбэрийн матриц A-ийн тодорхойлогч тэгшитгэлийн шийдийг олбол

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 12 \\ 12 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -25 + \lambda^2 - 144 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 = 169 \;\Rightarrow$$

$\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = -13$.

A матрицын $\lambda_1 = 13$ хувийн утгат хувийн $[u_1\ u_2]^{\mathrm{T}}$ вектор баганыг олбол

$$\begin{bmatrix} 5-13 & 12 \\ 12 & -5-13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -8u_1 + 12u_2 = 0 \\ 12u_1 - 18u_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{2}u_2$$

Эндээс хувийн вектор багана нь $[3s\ 2s]^{\mathrm{T}}$, $\forall s \in \mathbb{R}$ $(s \neq 0)$ болно. Энэ вектор баганыг нормчилбол $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_2 = -13$ хувийн утгатай $[v_1\ v_2]^{\mathrm{T}}$ вектор баганыг олъё.

$$\begin{bmatrix} 5-(-13) & 12 \\ 12 & -5-(-13) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \left. \begin{matrix} 18v_1 + 12v_2 = 0 \\ 12v_1 + 8v_2 = 0 \end{matrix} \right\} \ \Rightarrow$$

$v_1 = -\dfrac{2}{3}v_2$. Эндээс $[-2k\ 3k]^{\mathrm{T}}$, $k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$ нь олох вектор багана. Үүнийг нормчилбол $[-\frac{2}{\sqrt{13}}\ \frac{3}{\sqrt{13}}]^{\mathrm{T}}$ байна.

(7.12) квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт шилжүүлэх ортогональ хувиргалт нь

$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

матрицтай.

Шинэ $(0, i', j')$ системийн суурийн векторууд

$$i' = \frac{3}{\sqrt{13}}i + \frac{2}{\sqrt{13}}j, \qquad j' = -\frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

болно. $(0i', j')$ системд өгсөн тэгшитгэл нь

$$13x'^2 - 13y'^2 + [6\sqrt{13}\ 4\sqrt{13}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 13 = 0$$

буюу

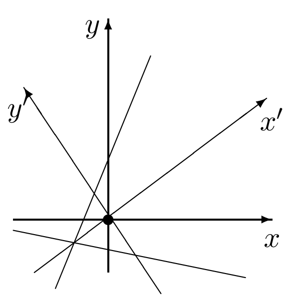
$$13x'^2 - 13y'^2 + 26x' + 13 = 0 \ \Rightarrow \ x'^2 - y'^2 + 2x' + 1 = 0$$

болно.

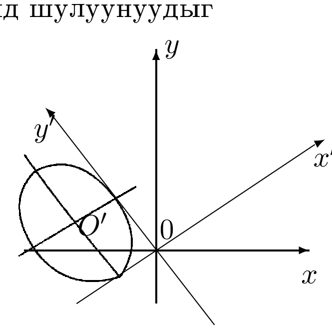
Энэ сүүлчийн тэгшитгэлд бүтэн квадрат ялгавал

$$(x'+1)^2 - y'^2 = 0 \ \Rightarrow \ (x'+y'+1) \cdot (x'-y'+1) = 0$$

Иймд энэ тэгшитгэл нь $x'+y+1=0$, $x'-y'+1=0$ гэсэн огтлолцсон шулууныг дүрслэнэ. $(0, i', j')$ системд шулуунуудыг



Зураг 78



Зураг 79

байгуулбал 79-р зураг гарна. Энэ нь $(0, i, j)$ системд өгсөн тэгшитгэл нь огтлолцсон хос шулууныг дүрслэнэ гэдгийг заана.

Жишээ 7.8. $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$ тэгшитгэлийг хялбар хэлбэрт оруулж энэ тэгшитгэлээр дүрслэгдэх геометрийн дүрсийг байгуул.

Бодолт. Өгсөн тэгшитгэлийг

$$[x\ y]\cdot\begin{bmatrix}17 & 6\\ 6 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+[20\sqrt{5}\ 0]\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+20=0$$

гэж бичье.

$$[x\ y]\cdot\begin{bmatrix}17 & 6\\ 6 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт оруулах ортогональ хувиргалтын матриц T-г олъё. Энэ квадратлаг хэлбэрийн матрицын тодорхойлогч тэгшитгэлийг бодож хувийн утгыг олбол

$$\begin{vmatrix}17-\lambda & 6\\ 6 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \lambda^2-25\lambda+100=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=20,\ \lambda_2=5.$$

Квадратлаг хэлбэрийн матрицын $\lambda_1=20$ хувийн утгатай хувийн $[u_1,u_2]^{\mathrm{T}}$ вектор баганыг олъё.

$$[A-20E]\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}17-20 & 6\\ 6 & 8-20\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}-3u_1+6u_2=0\\ 6u_1-12u_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow u_1=2u_2$$

A матрицын $\lambda_1=20$ хувийн утгатай вектор багана $[2s\ s]^{\mathrm{T}}$,
$s\neq 0$, $\forall s\in\mathbb{R}$ байна. Үүнийг нормчилбол $[\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}]^{\mathrm{T}}$ болно.

Үүнтэй адилаар A матрицын $\lambda_2=5$ хувийн утгатай вектор баганыг олбол $[-s,2s]^{\mathrm{T}}$, $s\neq 0$, $\forall s\in\mathbb{R}$. Үүнийг нормчилбол $[-\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{2}{\sqrt{5}}]^{\mathrm{T}}$ болно. Квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт шилжүүлэх ортогональ хувиргалт нь

$$T=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

матрицтай байна.

$(0,i',j')$ шинэ системийн суурийн векторууд

$$i'=\frac{2}{\sqrt{5}}i+\frac{1}{\sqrt{5}}j,\quad j'=-\frac{1}{\sqrt{5}}i+\frac{2}{\sqrt{5}}j$$

болно.

$(0,i',j')$ системд өгсөн тэгшитгэл

$$20x'^2+5y'^2+[20\sqrt{5}\ 0]\cdot\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+20=0$$

буюу

$$20x'^2 + 5y'^2 + 40x' - 20y' + 20 = 0$$

болно. Энэ тэгшитгэлээс бүтэн квадрат ялгавал

$$20(x'+1)^2 + 5(y'-2)^2 = 20 \;\Rightarrow\; \frac{(x'+1)^2}{1} + \frac{(y'-2)^2}{4} = 1$$

Энэ нь $(0, i', j')$ системд $O'(-1, 2)$ цэг дээр төвтэй $a = 1,\; b = 2$ гэсэн хагас тэнхлэгүүдтэй, тэгш хэмийн тэнхлэгүүд нь OX', OY' тэнхлэгүүдтэй паралель эллипс байна (зураг 79).

7.4. Дасгал ба бодлогууд

№1. Дараах квадратлаг хэлбэрийн рангийг ол.

а) $L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

б) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

№2. Өгсөн квадратлаг хэлбэрийг хялбар хэлбэрт шилжүүл. Энэ хялбар хэлбэрт шилжүүлэх ортогональ операторыг заа.

а) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ **б)** $5x_1^2 + 12x_1x_2$

в) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}x_2x_3$ **г)** $5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$

д) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3$ **е)** $4x_1x_2 + 3x_2^2$.

№3. Өгсөн тэгшитгэл нь энэ тэгшитгэлээр дүрслэгдэх хавтгайн геометрийн дүрсийг байгуул.

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 9\sqrt{2}x + 9\sqrt{2}y = 0$

б) $3x^2 + 4xy - 12\sqrt{5}x + 16 = 0$

в) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 3\sqrt{10}x + \sqrt{10}y = 0$

г) $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 32 = 0$

д) $3y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y - 1 = 0$

е) $25x^2 - 20xy + 4y^2 + 5\sqrt{29}x - 2\sqrt{29}y = 0$

ж) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4\sqrt{5}x - 3\sqrt{5}y - 15 = 0$.

Хариу

1. **а)** 1, **б)** 3 **2.** **а)** $3y_1^2 - y_2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$, **б)** $9y_1^2 - 4y_2^2$, $x_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_1 - \frac{2}{\sqrt{13}}y_2$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}y_2$, **в)** $2y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}y_3$, $x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, **г)** $9y_1^2 + 14y_2^2$, $x_1 = -\frac{5}{\sqrt{70}}y_2 + \frac{3}{\sqrt{14}}y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{6}{\sqrt{70}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{14}}y_3$, $x_3 = -\frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{70}}y_2 + \sqrt{1}\sqrt{14}y_3$, **д)** $6y_1^2 + 3y_2^2$, $x_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, **е)** $-y_1^2 + 4y_2^2$, $x_1 = \frac{2y_1 + y_2}{\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{-y_1 + 2y_2}{\sqrt{5}}$ **3.** **а)** $\frac{x'^2}{9} + \frac{(y'+1)}{1} = 1$, **б)** $\frac{(y'+6)^2}{16} - \frac{(x'-3)^2}{4} = 1$, **в)** $y'^2 = x'$, **г)** $\frac{(x'-1)^2}{16} - \frac{(y'-0.5)^2}{4} = 1$, **д)** $\frac{(y'+3)^2}{4} - \frac{(x'+1)^2}{1} = 1$, **е)** $y' = 0 \quad y' + 1 = 0$, **ж)** $(y'+1)^2 = -(x'-4)$.

Ном зүй

[1] Беклемишев Д.В., "Курс аналитической и линейной алгебры", М. Наука, 1980.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М., "Элементы линейной алгебры и аналитической геометрий", М. Наука, 1980.

[3] Мальцев А.И., "Основы линейной алгебры", М. Наука, 1980.

[4] Клетеник Д.В., "Сборник задач по аналитической геометрии", М. Наука, 1980.

[5] Бугров Я.С., Никольский С.М., "Задачник", М. Наука, 1982.

[6] Дадаян А.А., Масалова Е.С., "Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры", Минск, 1981.

[7] У.Доёд, Ц.Далайжамц, "Шугаман алгебр ба аналитик геометр".

[8] М.Дэнсмаа, "Дээд математик I", Улаанбаатар, 2000 он.

[9] Апатенок Р.Ф., Маркина А.М. и другие, "Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии", Минск, 1986.

[10] Крынский. Х.В., "Математика для экономистов", М. Наука, 1970.

Гарчиг

ISBN 978–99929–53–97–7

ШУГАМАН АЛГЕБР БА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЙН ҮНДЭС

Зохиогч: М.Дэнсмаа

Редактор: Ц.Навчаа

Хэвлэлийн эхийг бэлтгэсэн систем: LaTeX2ε

Хэвлэлийн редактор: Ц.Навчаа

Хэвлэлийн хуудас: 19.5

Хэвлэлийн газар: МУИС-ийн хэвлэх үйлдвэр